Logik und Mengenlehre

Prof. Dr. A. Raphaélian
Fachbereich 1 - Ingenieurwissenschaften I
Hochschule für Technik und Wirtschaft Berlin

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Logik

Die Verwendung mathematischer Vokabeln (etwa: Menge, Funktion, Gleichung) und ihre Verbindung zu Sätzen (etwa: diese Funktion ist positiv, die erste Gleichung hat keine Lösung) setzt voraus, daß diese Begriffe und Verknüpfungen jeder Personengruppe, die sie verwenden, unzweideutig klar sind. Ist das nicht der Fall, so muß darüber zuerst Klarheit hergestellt werden: man muß sich zuerst über den Umgang mit diesen Begriffen verständigen. In der Mathematik wird dabei „Verständigen“ in einem stärkeren Sinne verwendet als in der Umgangssprache üblich.

In gewisser Weise ähnelt die Sprache der Mathematik daher der Juristensprache: vom Sprachstil her unmöglich, aber genau auf den Punkt bezogen. Wenn man damit allerdings nachlässig umgeht, so kann auch dabei etwas schiefgehen, wie das folgende Beispiel aufdeckt:

Beispiel 1.1

Zum 1. August 1995 wurden die Mieten in den neuen Bundesländern und im Ostteil Berlins um 15 % erhöht. § 12 Abs. 1 Satz 2 MHG (Miethöhegesetz) beschreibt eine Ausnahme:

> Der Erhöhungssatz ermäßigt sich um 5 vom Hundert bei Wohnraum, der nicht mit einer Zentralheizung und einem Bad ausgestattet ist.

Es stellt sich die Frage, ob sich der Erhöhungssatz von 15 % auf 10 % nur dann ermäßigt, wenn

- Zentralheizung *und* Bad fehlen (vermieterfreundliche Regelung)

oder auch schon, wenn

- Zentralheizung *oder* Bad fehlen (mieterfreundliche Regelung)?

Nach Veröffentlichung dieses Gesetzes kam es zu hitzigen Diskussionen in der Presse und in der Fachpresse, selbst die Gerichte wurden eingeschaltet und gelangten zu unterschiedlichen Auslegungen: ein Berliner Amtsgericht hatte in einem ersten Verfahren in dieser Angelegenheit entschieden, für eine 15prozentige

Erhöhung müßten Zentralheizung und Bad vorhanden sein - das entspricht der zweiten Auffassung oben, der mieterfreundlichen Regelung. In Potsdam hatte hingegen ein Amtsrichter die Auffassung geäußert, Mietminderung sei nur möglich, wenn wirklich beides - also Zentralheizung und Bad - fehlten (vermieterfreundliche Regelung).

Letztendlich wurde nach dem Willen des Gesetzgebers entschieden, welcher die mieterfreundliche Regelung *gemeint* hat, selbst wenn er sie vielleicht auch nicht klar genug *ausgedrückt* hat.

In der Mathematik muß über die verwendeten Begriffe und Sätze eine Verständigung möglich sein, welche eindeutigen Regeln genügt. Die Lehre von den allgemeinsten Regeln der Verständigung heißt *Logik*. Eine Verständigungshandlung gemäß solchen Regeln heißt eine *Argumentation* (man spricht auch vom (logischen) *Schließen* oder *Deduzieren*) .

1.1 Aussagen

Definition 1.1

Eine *Aussage* ist ein Satz, dem sich genau eines der beiden Attribute „Wahr“ (W) oder „Falsch“ (F) zuordnen läßt. Über diese Zuordnung muß nach einem abgesprochenen und allseitig akzeptierten Verfahren entschieden werden können[1]. Die Attribute W und F heißen *Wahrheitswerte*.

Sprechweisen für „A hat den Wahrheitswert W“ sind:

- A ist wahr,
- A gilt,
- A ist erfüllt.

Die Möglichkeit, in der Sprache der Aussagenlogik Sachverhalte

eindeutig, zeitunabhängig und allgemeingültig

darstellen zu können, wird über die einschneidende Einschränkung der üblichen Denkweise erkauft, daß Aussagen entweder nur wahr oder nur falsch sein können. Fälle wie „so gut wie wahr“ oder „fast immer wahr“ sind hier nicht zugelassen. Diese sog. *Zweiwertigkeit* der Aussagen wird dem Denken künstlich aufgesetzt, ist aber für die hier dargestellte Mathematik unerläßlich.

[1] Die Vereinbarung über die Zuordnung von Wahrheitswerten ist nicht präzise und sicherlich abhängig von dem Personenkreis, der sich jeweils über einen Satz verständigen will. Man betrachte z.B. die folgenden beiden Aussagen:
„Dieser Versuch zum Weg-Zeit-Gesetz der Physik liefert eine quadratische Abhängigkeit.“
„Die kulturellen Wurzeln Deutschlands liegen eher bei den Römern als bei den Germanen.“
Es ist offenbar einfacher, sich in den Naturwissenschaften auf den Wahrheitswert einer Aussage zu einigen als in den Geisteswissenschaften.

Beispiele 1.2

- Aussagen:

  (i) Der Rhein ist ein Fluß.
  (Entscheidungsverfahren etwa: Fließende Gewässer von mehr als zehn Meter Breite heißen Fluß.)

  (ii) Es gibt eine Zahl x mit der Eigenschaft $x^2 - 2x + 1 = 0$.
  (Entscheidungsverfahren etwa: Man gebe eine solche Zahl an, nämlich $x = 1$.)

  (iii) Die Donau fließt durch Frankreich.
  (Wahrheitswert F)

  (iv) Wenn dieser Tisch rund ist, dann freß' ich einen Besen.
  (Wahrheitswert ?)

- Nichtaussagen:

  (i) Der Gewinner erhält einen Geldbetrag und ein wertvolles Geschenk oder eine Reise.
  (Der Inhalt ist nicht verstehbar: Erhält der Gewinner den Geldbetrag auch dann, wenn er die Reise wählt oder nur, wenn er das wertvolle Geschenk wählt?)

  (ii) Die linke Kugel ist doppelt so groß wie die rechte.
  (Was ist „doppelt so groß"? Durchmesser, Querschnittsfläche, Volumen?)

  (iii) $x^2 - 2x + 1 = 0$.
  (Was ist hier x?)

  (iv) Ich lüge jetzt.
  (Es ist nicht feststellbar, ob dieser Satz wahr oder falsch ist.)

Bemerkung:

(i) Eine Aussage ist nicht ein Satz, der einen Wahrheitswert *hat*, sondern ein Satz, dem man einen Wahrheitswert *zuordnen* kann. Es läßt sich dann höchstens noch über die Entscheidung des Wahrheitswertes streiten. Der Satz „Auf fremden Planeten gibt es Lebewesen" ist somit eine Aussage von bis dato nicht definiertem Wahrheitswert.

(ii) Gegenstand der Aussagenlogik ist es nun, festzulegen, wie sich Wahrheitswerte von Aussagen zu Wahrhweitswerten von komplizierteren sprachlichen Gebilden fortsetzen lassen. In diesen Untersuchungen wird letztlich ignoriert, welches die zugrundeliegenden inhaltlichen Bedeutungen der einzelnen Aussagen sind und warum diese die aktuellen Wahrheitswerte haben.

1.2 Junktoren

Bezeichnen A und B zwei Aussagen, so lassen sich mit Hilfe von *Junktoren* („Verbindern“) neue Aussagen herstellen:

Junktor	Bedeutung (Interpretation)	Zeichen
Negation	nicht A	$\neg A$
Konjunktion	A und B	$A \wedge B$
Disjunktion	A oder auch B	$A \vee B$
Antivalenz	Entweder A oder B	A *aut* B
Subjunktion	wenn$A$, dann B	$A \Rightarrow B$
Äquivalenz	genau dann$A$, wenn B	$A \Leftrightarrow B$

(1.1)

Die Wahrheitswerte der so zusammengesetzten Aussagen sind festgelegt über die in der folgenden Tabelle enthaltenen Normierung. Eine derartige Tabelle heißt eine *Wahrheitstabelle* oder *Wahrheitstafel*.

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	A *aut* B	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
W	W	F	W	W	F	W	W
W	F	F	F	W	W	F	F
F	W	W	F	W	W	W	F
F	F	W	F	F	F	W	W

(1.2)

Im deutschen Sprachgebrauch sind manche der Verknüpfungen nicht immer eindeutig.

Beispiel 1.3

$A: \iff$ Du räumst jetzt Dein Zimmer auf.
$B: \iff$ Du bekommst kein Taschengeld.

Ein „oder“ in „A oder B“ wäre hier wahrscheinlich „ausschließend“ gemeint, lateinisch *aut*.

$C: \iff$ Ich wünsche mir eine Tauchausrüstung.
$D: \iff$ Ich möchte ans Mittelmeer verreisen.

Ein „oder“ in „C oder D“ wäre hier wahrscheinlich „nicht ausschließend“ gemeint, lateinisch *vel*.

Man beachte hierzu die unterschiedliche Normierung dieser beiden „oder“ in der Wahrheitstafel. In der Mathematik - nicht in der Informatik! - wird das „oder“ ausschließlich im Sinne von „vel“ benutzt, falls nicht explizit etwas Anderes vereinbart wird.

Diese Tabelle ist eine Normierung, also eine Festlegung der Bedeutung der Junktoren. Für diese Festlegung spricht einzig, daß sie sich als praktisch erwiesen hat. Hierbei ist die Normierung der Implikation „$\Rightarrow$“ wohl am schwierigsten einzusehen und etwa so zu verstehen: es ist ausgeschlossen, daß A gilt und nicht B.

Beispiel 1.4

(i) Wenn dieser Tisch rund ist, dann freß' ich einen Besen.
Das ist ein Beispiel für die letzte Zeile in „$A \Rightarrow B$“, wenn der Tisch *nicht* rund ist.

(ii)
$$\begin{aligned} A: &\iff \text{Ich kaufe mir einen Lottoschein.} \\ B: &\iff \text{Ich erhalte einen Lottogewinn.} \end{aligned}$$

Veieinbart man jetzt, der Aussage „$A \Rightarrow B$“ den Wahrheitswert W zuzuordnen, falls man nicht unzufrieden ist, so erhält man die oben angegebene Normierung.

Für die Implikation „$A \Rightarrow B$“ gibt es die folgenden Sprechweisen:

(i) Aus A folgt B.

(ii) Wenn A, dann B.

(iii) Wenn A gilt, so gilt B.

(iv) B gilt dann, wenn A gilt.

(v) A gilt nur dann, wenn B gilt.

(vi) A ist hinreichend für B.

(vii) B ist notwendig für A.

Ähnlich sind für die Äquivalenz „$A \Leftrightarrow B$“ die folgenden Sprechweisen üblich:

(i) A ist äquivalent zu B.

(ii) A gilt dann und nur dann, wenn B gilt.

(iii) A gilt genau dann, wenn B gilt.

(iv) A ist hinreichend und notwendig für B.

Bemerkung

Unter den Junktoren gibt es eine Hierarchie, welche das Setzen von Klammern häufig überflüssig macht. Diese Hierarchie spiegelt sich schon in der Reihenfolge wider, in der die Junktoren in (1.1) aufgeführt sind. So bedeutet beispielsweise

$$A \wedge B \Longrightarrow A \vee B$$

$$(A \wedge B) \Longrightarrow (A \vee B) \qquad \text{und nicht} \qquad A \wedge (B \Longrightarrow A) \vee B$$

oder Anderes. Im Zweifelsfalle setze man jedoch lieber Klammern zuviel als zuwenig.

Logische Aussagen spielen auch in Computern eine zentrale Rolle. In digitalen Rechnern wird alles durch zwei „bits“ (binary digit) dargestellt. Alle Zahlen, Zeichenketten („strings“), Zeichnungen etc. werden daraus durch logische Verknüpfungen entsprechend den obigen Beispielen hergeleitet. Hierbei handelt es sich allerdings nicht immer um Aussagen im wörtlichen Sinne, sondern um dazu analoge Bildungen. So lassen sich die Ziffern einer Dualzahl als „Aussagen“ betrachten, die jeweils wahr (= 1) oder falsch (= 0) sind.

Beispiel 1.5

Als *Halbaddierer* bezeichnet man ein Rechenwerk zur Addition zweier einstelliger Dualzahlen, also zweier Dualziffern. Das Ergebnis kann zweistellig sein, also muß dafür eine zweistellige Dualzahl als Speicherplatz vorgesehen sein. Werden die beiden Ziffern 0 und 1 genannt, so resultieren im Dualsystem die folgenden vier Operationen:

$$\begin{aligned} X + Y &= A\ B \\ \\ 0 + 0 &= 0\ 0 \\ 0 + 1 &= 0\ 1 \\ 1 + 0 &= 0\ 1 \\ 1 + 1 &= 1\ 0 \end{aligned}$$

Es ergibt sich also evtl. ein Übertrag. Mit den Ziffern AB (jeweils 0 oder 1) werden die beiden Ziffern des Additionsergebnisses bezeichnet.

Beh. :
$$\begin{aligned} A &= X \wedge Y \\ B &= (X \wedge \neg Y) \ \vee\ (\neg X \wedge Y) \quad (= \ X \ aut \ Y) \end{aligned}$$

Beweis (Mit einer Wahrheitstafel)

X	Y	$X \wedge Y$	$X \wedge \neg Y$	$\neg X \wedge Y$	$(X \wedge \neg Y) \vee (\neg X \wedge Y)$
0	0	**0**	0	0	**0**
0	1	**0**	0	1	**1**
1	0	**0**	1	0	**1**
1	1	**1**	0	0	**0**

(1.3)

Bemerkung:

Wie man auf den Ausdruck für AB kommt, kann man in der *Boole'schen Algebra* lernen. Dort wird auch gezeigt, daß und wie man logische Verknüpfungen durch elektronische Bausteine realisieren kann. Für die hier dargestellte zweiwertige Logik existiert somit ein physikalisches Modell, an welchem die Definitionen und Sätze empirisch nachgeprüft werden können.

1.3 Aussageformen

In den vorangehenden Beispielen wurden Aussagen mit großen lateinischen Buchstaben $A, B, \ldots$ gekennzeichnet und Gesetze hingeschrieben, in denen der konkrete Inhalt der durch diese Buchstaben repräsentierten Aussagen keine Rolle mehr spielt.

Definition 1.2

(i) Die als Platzhalter für Aussagen verwendeten Buchstaben $A, B, \ldots$ heißen *Aussagevariablen*.

(ii) Die aus Aussagevariablen mittels Junktoren und Klammern hergestellten Zeichenreihen heißen *Aussageformen*.

Beispiele 1.6 (Aussageformen)

$$\begin{array}{ccl} A & \Longrightarrow & B \vee A \\ (A \wedge B) & \Longrightarrow & \neg(\neg A \wedge C) \ \vee \ (B \wedge C) \\ (A \vee B) & \Longleftrightarrow & \neg\,(\neg A \wedge \neg B) \\ A & \Longrightarrow &) \neq (\ ) \wedge AB\vee) \end{array}$$

Formal entspricht auch das letzte Beispiel der Definition einer Aussageform, dennoch ist es unsinnig. Das liegt daran, daß in der Definition der Aussageformen nicht vereinbart worden ist, nach welchen Regeln die Zeichenreihen gebildet werden dürfen; das wäre die *Syntax* bzw. *Grammatik* der Junktorenlogik. Auch in der deutschen Sprache entspricht ja nicht jede (formal richtige) Aneinanderreihung von Buchstaben einem Wort.

Ich beschränke mich hier auf eine grobe Beschreibung:
Eine Aussageform ist eine aus Aussagevariablen, Junktoren und Klammern hergestellte Zeichenreihe, die bei *Belegung*, d.h. Ersetzung der Aussagevariablen durch Aussagen, zu einer Aussage wird. Der Wahrheitswert der so entstandenen Aussage ist dann über die Normierung der Junktoren ermittelbar, wenn die Wahrheitswerte der Einzelaussagen bekannt sind.

Im allgemeinen werden Aussageformen durch gewisse Belegungen der Aussagevariablen zu wahren -, durch andere wiederum zu falschen Aussagen.

Definition 1.3

(i) Eine Aussageform heißt *erfüllbar*, wenn es eine Belegung der in ihr auftretenden Aussagevariablen gibt, so daß die entstehende Aussage den Wahrheitswert W hat. In einem solchen Fall heißt die Belegung auch ein *Modell* der Aussageform.

(ii) Eine Aussageform heißt *unerfüllbar*, wenn bei jeder Belegung der in ihr auftretenden Aussagevariablen die entstehende Aussage den Wahrheitswert F hat.

(iii) Eine Aussageform heißt *allgemeingültig* oder eine *Tautologie*, wenn bei jeder Belegung der in ihr auftretenden Aussagevariablen die entstehende Aussage den Wahrheitswert W hat.

Eine Aussageform heißt also erfüllbar, wenn mindestens ein Modell existiert, andernfalls unerfüllbar. Ist jede Belegung ein Modell, so ist die Aussageform allgemeingültig.

Beispiele: 1.7

(i) A ist erfüllbar

(ii) $A \wedge \neg A$ ist unerfüllbar

(iii) $A \vee \neg A$ ist allgemeingültig

Satz 1.1
Die folgenden Aussageformen sind Tautologien:

(i) $A \implies A$

(ii) $A \vee \neg A$

(iii) $\neg(A \wedge \neg A)$

(iv) $A \iff \neg\neg A$

(v) $(A \Rightarrow B) \iff (\neg B \Rightarrow \neg A)$ Kontraposition

(vi) $\big[(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)\big] \implies (A \Rightarrow C)$ Transitivität

(vii) $(A \Rightarrow B) \iff (\neg A \vee B)$

(viii) $\neg(A \Rightarrow B) \iff (A \wedge \neg B)$

(ix) $\big[\neg A \Rightarrow (B \wedge \neg B)\big] \iff A$

(x) $\big[(A \wedge \neg B) \Rightarrow (C \wedge \neg C)\big] \iff (A \Rightarrow B)$

(xi)	$(A \vee B) \vee C \iff A \vee (B \vee C)$ $(A \wedge B) \wedge C \iff A \wedge (B \vee C)$	Assoziativität
(xii)	$(A \wedge B) \vee C \iff (A \wedge B) \vee (B \wedge C)$ $(A \vee B) \wedge C \iff (A \vee B) \wedge (B \vee C)$	Distributivität
(xiii)	$A \vee B \iff B \vee A$ $A \wedge B \iff B \wedge A$	Kommutativität
(xiv)	$A \wedge A \iff A$ $A \vee A \iff A$	Idempotenz
(xv)	$A \implies A \vee B$ $B \implies A \vee B$	Bedeutung von „oder“
(xvi)	$(A \wedge B) \implies A$ $(A \wedge B) \implies B$	Bedeutung von „und“

Beweis Mit einer Wahrheitstafel.

Bemerkung:

(i) Betrachte die Äquivalenz (vii) des letzten Satzes. Man bezeichnet A als *Voraussetzung*, B als *Behauptung*. Dann bedeutet die rechte Seite von (vii) in Worten:

> Es besteht der durch die Behauptung formulierte Sachverhalt, oder der durch die Voraussetzung ausgedrückte Sachverhalt besteht nicht.

Hierdurch wird noch einmal unterstrichen, daß eine Implikation wahr ist, wenn

- ihre Behauptung wahr ist, unabhängig vom Wahrheitsgehalt der Voraussetzung;
- ihre Voraussetzung falsch ist, unabhängig vom Wahrheitsgehalt der Behauptung.

(ii) Mit Hilfe der rechten Seite von (viii) läßt sich die Implikation $A \Rightarrow B$ so interpretieren:

> Es ist ausgeschlossen, daß A gilt und nicht B.

Der letzte Satz beschäftigte sich mit Tautologien, also mit Aussageformen, die bei jeder Belegung ihrer Aussagevariablen mit Aussagen zu einer wahren Aussage werden. Tautologien sind das formale Gerüst eines mathematischen Beweises.

Bezeichnungen

(i) Zur Abkürzung von Aussageformen werden im folgenden kleine lateinische Buchstaben in Klammern verwendet, z.B.:

$$(a) :\iff \quad \left[\,\left(\neg A \Rightarrow (B \wedge \neg B)\right) \Leftrightarrow A\right]$$

(ii) Das in (i) benutzte Zeichen „ $:\iff$ “ heißt *definitorische Äquivalenz*, zu verstehen etwa als „habe die gleiche Bedeutung wie“. Der Doppelpunkt steht dabei auf der Seite des zur Abkürzung eingeführten Symbols.

(iii) Sei n eine natürliche Zahl und seien $(a_1), \ldots, (a_n), (b)$ Aussageformen.

Eine Zeichenreihe

$$\begin{array}{c} (a_1) \\ (a_2) \\ \vdots \\ (a_n) \\ \hline (b) \end{array}$$

auch geschrieben in der Form

$$(a_1), \ldots, (a_n) \quad \models \quad (b)$$

heißt ein *Schluß*.

Definition 1.4

(i) Zwei Aussageformen (a) und (b) heißen *logisch äquivalent*, geschrieben

$$(a) \;\equiv\; (b),$$

wenn die Aussageform

$$(a) \iff (b)$$

eine Tautologie ist.

(ii) Ein Schluß

$$(a_1), \ldots, (a_n) \quad \models \quad (b)$$

heißt *gültig* oder *korrekt* (auch: *logische Implikation*), wenn die Aussageform

$$\left[\,(a_1) \wedge \ldots \wedge (a_n)\,\right] \quad \Longrightarrow \quad (b)$$

eine Tautologie ist.

Beispiele 1.8

(i) $(a) \;:\Longleftrightarrow\; (A \Rightarrow B)$

$(b) \;:\Longleftrightarrow\; (\neg A \vee B)$

Nach Satz 1.1 (vii) ist die Aussageform

$$(a) \iff (b)$$

eine Tautologie, folglich sind (a) und (b) logisch äquivalent:

$$(a) \;\equiv\; (b)\ .$$

(ii) $(a_1) \;:\Longleftrightarrow\; A$

$(a_2) \;:\Longleftrightarrow\; A \wedge B$

$(b) \;:\Longleftrightarrow\; A \vee B$

Dann ist $(a_1), (a_2) \models (b)$ ein korrekter Schluß. Beweis etwa mit einer Wahrheitstafel:

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$[(a_1) \wedge (a_2)] \Rightarrow (b)$
W	W	W	W	W
W	F	F	W	W
F	W	F	W	W
F	F	F	F	W

(1.4)

(iii) $(a_1) \;:\Longleftrightarrow\; A$

$(a_2) \;:\Longleftrightarrow\; A \vee B$

$(b) \;:\Longleftrightarrow\; A \wedge B$

Dann ist $(a_1), (a_2) \models (b)$ kein korrekter Schluß:

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$[(a_1) \wedge (a_2)] \Rightarrow (b)$
W	W	W	W	W
W	F	F	W	F
F	W	F	W	W
F	F	F	F	W

(1.5)

Bemerkung:

(i) (logisch äquivalente Aussageformen)

Sind (a) und (b) logisch äquivalente Aussageformen, so kann in jeder Aussageform (c), die (a) als Teil enthält, (a) durch (b) ersetzt werden, ohne daß sich die Bedeutung von (c) ändert: bei jeder Belegung hat (c) vor und nach der Ersetzung dieselben Wahrheitswerte. Man verschaffe sich konkrete Belegungen für (i) des letzten Beispiels.

(ii) (korrekte Schlüsse)

Wozu braucht man korrekte Schlüsse? Zum Schließen! Man will durch logisch korrekte Verarbeitung aus als Aussagen formulierten Voraussetzungen - den *Prämissen* - aussagenlogische Folgerungen - die *Konklusionen* - ableiten.

Definition 1.5

Schlußregeln sind formale Regeln, die angeben, wie man aus (bekannten) Aussagen (neue) Aussagen gewinnen kann.

$$\begin{array}{cccccc} (a_1) & \longrightarrow & & & \\ \vdots & \longrightarrow & \boxed{\text{Schlußregeln}} & \longrightarrow & (b) \\ (a_n) & \longrightarrow & & & \\ & & & & \\ \text{Prämissen} & & \text{logische Verarbeitung} & & \text{Konklusion} \end{array}$$

Dabei wird gefordert

> Wahre Prämissen sollen bei korrekter Anwendung der Schlußregeln in jedem Fall zu wahren Konklusionen führen.

Beispiele 1.9

(i) Prämisse(n):

(a_1) : $\Longleftrightarrow$ Heute ist Sonntag.
(a_2) : $\Longleftrightarrow$ Wenn heute Sonntag ist, dann ist morgen Montag.

Konklusion:

(b) : $\Longleftrightarrow$ Morgen ist Montag.

(ii) Prämisse(n):

(a_1) : $\Longleftrightarrow$ $2 \cdot 2 = 4$.
(a_2) : $\Longleftrightarrow$ Wenn $2 \cdot 2 = 4$ ist, liegt Berlin an der Spree.

Konklusion:

(b) : $\Longleftrightarrow$ Berlin liegt an der Spree.

Beide Beispiele sind Subjunktionen (wenn-dann-Verknüpfungen), und beide haben wahre Prämissen. Im Gegensatz zu (i) scheint man aber nicht bereit, (ii) als logische Folgerung zu akzeptieren, weil zwischen Vorder- und Hintersatz kein inhaltlicher Zusammenhang besteht. Doch wo soll man eine Grenze ziehen?

Durch inhaltliche Betrachtungen allein kommt man hier nicht weiter, man braucht einen Abstraktionsprozeß. Aussagenlogische Folgerungen werden gerade *nicht* durch Inhalte begründet.

Satz 1.2

Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) $(a_1), \ldots, (a_n) \ \models \ (b)$ ist ein korrekter Schluß.

(ii) Bei jeder Belegung der Aussageformen, bei der alle Prämissen wahr sind, ist auch die Konklusion wahr.

Beweis (Mit einer Wahrheitstafel)

$(a_1) \wedge \ldots \wedge (a_n)$	(b)	$(a_1) \wedge \ldots \wedge (a_n) \ \Rightarrow \ (b)$
W	W	W
W	F	F (ausgeschlossen!)
F	W	W
F	F	W

(1.6)

(i) $\Longrightarrow$ (ii):

$(a_1) \wedge \ldots \wedge (a_n) \ \Rightarrow \ (b)$ ist eine Tautologie, also eine bei jeder Belegung wahre Aussage. Nach Definition der Subjunktion steht in der zweiten Zeile der Wahrheitstafel der Wahrheitswert F; dieser kann nach Voraussetzung aber nicht auftreten. Folglich ist die Belegung

$$(a_1) \wedge \ldots \wedge (a_n) \ = \ W \ , \quad (b) \ = \ F$$

kein Modell für den obigen Schluß, d.h. es gilt (ii).

(ii) $\Longrightarrow$ (i):

Nach Voraussetzung ist bei wahren Prämissen auch die Konklusion wahr, folglich kann die zweite Zeile in der Wahrheitstafel nicht auftreten, und

$$(a_1) \wedge \ldots \wedge (a_n) \ \Longrightarrow \ (b)$$

ist eine Tautologie.

Bemerkung:

Ist ein Schluß korrekt, so kann die zweite Zeile in obiger Wahrheitstafel nicht auftreten, und es bleiben drei andere Möglichkeiten:

(a) Ist die Prämisse $(a_1) \wedge \ldots \wedge (a_n)$ wahr, so ist die Konklusion wahr (1. Zeile).

(b) Ist die Prämisse $(a_1) \wedge \ldots \wedge (a_n)$ falsch, so kann die Konklusion (b) wahr oder falsch sein (Zeilen 3 und 4), man kann über (b) also nichts aussagen.

Beispiel 1.10
Sei n eine natürliche Zahl und seien

$$\begin{aligned} A \ :&\iff \quad n \text{ ist durch 4 teilbar.} \\ B \ :&\iff \quad n \text{ ist durch 2 teilbar.} \end{aligned}$$

Seien dann

$$\begin{aligned} (a_1) \ :&\iff \quad A \\ (a_2) \ :&\iff \quad (A \ \Rightarrow \ B) \\ (b) \ :&\iff \quad B\ , \end{aligned}$$

dann ist $(a_1), (a_2) \ \vDash \ (b)$ ein korrekter Schluß.

Mit korrekten Schlüssen hat man nun ein Mittel in die Hand bekommen, wie man aus wahren Aussagen aussagenlogische Folgerungen ableiten kann, welche dann ebenfalls wahr sind. Dabei handelt es sich um formale, d.h syntaktische Regeln, welche von den Inhalten der Aussagen unabhängig sind, auf welche diese Regeln angewendet werden.

1.4 Grundlagen eines mathematischen Beweises

In der Umgangssprache mag es mehrere Beweismethoden geben, z.B.:

- Beweis durch Aufzählung einiger Beispiele
- Beweis durch Abstimmung
- Beweis durch zunehmende Lautstärke
- Beweis durch Diffamierung

Es ist klar, daß „Beweise“ dieser Art in der Mathematik nicht zulässig sein können. Zulässige Beweise sind:

- Der *direkte Beweis* durch Herleitung der Aussage aus bekannten (bewiesenen, wahren) Aussagen mit Hilfe korrekter Schlüsse.
- Der *indirekte Beweis* (Widerspruchsbeweis) durch Annahme der Negation der Aussage und Ableitung eines Widerspruchs.

Ein mathematischer Beweis ist eine logisch korrekte Verarbeitung von bekannten Aussagen - den Prämissen - zur Ableitung aussagenlogischer Folgerungen - den Konklusionen.

Der folgende Satz beinhaltet die logischen Grundlagen eines mathematischen Beweises.

Satz 1.3

(1) Es gilt:

$$
\begin{array}{ll}
(1.1) & \neg(A \Rightarrow B) \quad \equiv \quad (A \wedge \neg B) \\
(1.2) & [\neg A \Rightarrow (C \wedge \neg C)) \quad \equiv \quad A \\
(1.3) & [(A \wedge \neg B) \Rightarrow (C \wedge \neg C)] \quad \equiv \quad (A \Rightarrow B)
\end{array}
$$

(2) Folgende Schlüsse sind korrekt:

$$
\begin{array}{ll}
(2.1) & (A \wedge \neg A) \quad \models \quad B \\
(2.2) & A\,,\; A \Rightarrow B \quad \models \quad B \\
(2.3) & A \Rightarrow B\,,\; \neg B \quad \models \quad \neg A \\
(2.4) & A \Rightarrow B\,,\; B \Rightarrow C \quad \models \quad A \Rightarrow C \\
(2.5) & \neg A \Rightarrow (C \wedge \neg C) \quad \models \quad A \\
(2.6) & A\,,\; (A \wedge \neg B) \Rightarrow (C \wedge \neg C) \quad \models \quad B
\end{array}
$$

Beweis

(1) folgt aus Satz 1.1 (viii), (ix) und (x).

(2) (2.1, (2.2) und (2.3) folgen mit einer Wahrheitstafel.
(2.4) folgt aus Satz 1.1 (vi)
(2.5) folgt aus Satz 1.1 (ix)
(2.6) folgt aus Satz 1.1 (x)

Bemerkung:

(i) (2.1) ist das „ex falso quodlibet“:
aus etwas Falschem kann man auf Alles schließen.

(ii) (2.2) entspricht dem üblichen direkten Beweis der Aussage B unter der Voraussetzung A:

Ist A wahr und ist $A \Rightarrow B$ wahr, so ist auch B wahr:

$$\Big[A \;\wedge\; (A \Rightarrow B)\Big] \quad \Longrightarrow \quad B \qquad \text{ist eine Tautologie.}$$

(iii) (2.5) und (2.6) geben die logische Struktur eines indirekten - oder Widerspruchsbeweises wieder:

(2.5): Wenn aus $\neg A$ ein Widerspruch folgt, dann gilt A.
(2.6): Wenn A gilt und aus $A \wedge \neg B$ ein Widerspruch folgt, so gilt B.

1.5 Prädikate und Quantoren

Die *Prädikatenlogik* ist eine Erweiterung der Aussagenlogik. Was hinzukommt, sind

- Quantoren
- Funktionssymbole
- Prädikatssymbole

In der Aussagenlogik war es nicht möglich auszudrücken, daß

- gewisse „Objekte“ in gewissen Beziehungen zueinander stehen
- eine Eigenschaft *für alle* Objekte gilt
- ein Objekt mit einer gewissen Eigenschaft *existiert*

Beispiel 1.11
Sei $x_0 \in \mathbb{R}$.
Für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, so daß für alle x mit (der Eigenschaft) $abs\,(x - x_0) < \delta$ gilt, daß $abs[f(x) - f(x_0)] < \varepsilon$ ist.

Die wesentlichen Bestandteile sind hier die sprachlichen Konstrukte

- Für alle
- es gibt
- die Verwendung von Funktionen ($abs, f, -$)
- die Verwendung von Relationen ($>$, $<$)

1.5.1 Prädikate

Definition 1.6

(i) Wörter oder Zeichen in einer Aussage, die etwas kennzeichnen oder benennen, heißen *Subjekte*[2].

(ii) Streicht man in einer Aussage eines oder mehrere Subjekte, so erhält man ein *Prädikat*.

(iii) Die Anzahl der entstandenen Leerstellen heißt *Stellenzahl des Prädikats*.

[2]Subjekte sind also Namen von Objekten oder Dingen; die Termini „Subjekt“ und „Objekt“ werden hier somit nicht im Sinne der Grammatik der Sprache verwendet.

Beispiele 1.12

(i) Einstelliges Prädikat:
... ist Student der Elektrotechnik

(ii) Zweistelliges Prädikat:
... ist verwandt mit ...

(iii) Dreistelliges Prädikat:
Die Differenz zwischen ... und ... ist ein Vielfaches von ...

(iv) Vierstelliges Prädikat:
... verhaftet ... zur Zeit ... am Ort ...

Prädikate werden abgekürzt durch große lateinische Buchstaben:

$$\begin{array}{rcl} A(\cdot)\,,\ B(\ ) & \ldots & \text{einstellige Prädikate} \\ A(\cdot,\cdot), B(\ ,\ ) & \ldots & \text{zweistellige Prädikate} \end{array}$$

z.B.:

$$\begin{array}{rcl} A(\ ) : & \Longleftrightarrow & \ldots \text{ ist Student der Elektrotechnik} \\ B(\ ,\ ) : & \Longleftrightarrow & \ldots \text{ ist mit } \ldots \text{ befreundet} \end{array}$$

Setzt man in die Leerstelle eines Prädikates geeignete Subjekte ein, so erhält man eine Aussage. Man muß sich allerdings einigen, welche Subjekte an welche Stelle eingesetzt werden dürfen; diese Subjekte nennt man *zulässig*. Meistens wird im folgenden klar sein, welche Subjekte zulässig sind. Wenn nicht, dann muß darüber erst Einigkeit erzielt werden, bevor das Prädikat verwendet werden darf.

Definition 1.7 (Erweiterung von Definition 1.2)
Eine *Aussageform* ist eine Zeichenreihe, gebildet aus

- Aussagevariablen (Platzhalter für Aussagen)
- Prädikatvariablen (Platzhalter für Subjekte)
- Prädikaten
- Junktoren
- Klammern

welche bei Belegung, d.h. Ersetzung von

- Aussagevariablen durch Aussagen
- Prädikatvariablen durch zulässige Subjekte

zu einer Aussage wird.

Beispiel 1.13

$$\begin{aligned} A(x)\ : &\iff x \text{ ist Student der Elektrotechnik} \\ B(x,y): &\iff x \text{ ist mit } y \text{ befreundet} \end{aligned}$$

Hier sind x und y Prädikatvariable, die durch geeignete Subjekte - etwa Namen von Menschen - zu ersetzen sind, um aus diesen Aussageformen Aussagen zu erhalten. Eine Aussageform ohne Vorkommen einer freien Variable heißt *geschlossen* oder eine *Aussage*.

Beispiel 1.14

Betrachte eine Lichterkette mit zehn Glühbirnen. Seien $g_1, \ldots, g_{10}$ die (Namen der) Glühbirnen, die dann die einzigen zulässigen Subjekte des Prädikates

$$E(\ ): \iff \ldots \text{ ist eingeschaltet}$$

sein sollen.

Mit Hilfe von $E(\ )$ lassen sich dann u.a. die folgenden Aussagen herstellen:

(i) $E(g)$,
wobei g eine der zehn Glühbirnen ist.

(ii) $E(g_1) \wedge E(g_2) \wedge \ldots \wedge E(g_{10})$,
also die Aussage: Alle Glühbirnen sind eingeschaltet.

(iii) $E(g_1) \vee E(g_2) \vee \ldots \vee E(g_{10})$,
also die Aussage: (Wenigstens) eine Glühbirne ist eingeschaltet.

1.5.2 Quantoren

Das letzte Beispiel soll verallgemeinert werden. Sei $A(\ )$ ein einstelliges Prädikat. Dann lassen sich aus der Aussageform $A(x)$ auf folgende Weisen Aussagen herstellen:

(i) Man ersetzt die Prädikatvariable durch ein zulässiges Subjekt.

(ii) Man setzt vor $A(x)$ die Wendung: „Für alle x“, abgekürzt durch

$$\bigwedge_x \quad \text{oder} \quad (\forall\ x)\ ,$$

also

$$\bigwedge_x A(x): \iff A(x_1) \wedge \ldots A(x_n) \wedge \ldots$$

(iii) Man setzt vor $A(x)$ die Wendung: „Es existiert ein x“, abgekürzt durch

$$\bigvee_x \quad \text{oder} \quad (\exists\, x)\ ,$$

also

$$\bigvee_x A(x) :\iff \quad A(x_1) \vee \ldots A(x_n) \vee \ldots$$

Diese Wendungen werden gesprochen als

$$\bigwedge_x A(x) \quad : \quad \text{Für alle } x \text{ gilt } A(x)$$

$$\bigvee_x A(x) \quad : \quad \text{Es existiert (wenigstens) ein } x \text{ mit } A(x)$$

Definition 1.8

Die Zeichen $\bigwedge$ bzw. $\bigvee$ heißen *Allquantor* bzw. *Existenzquantor*. Das Vorschalten von Quantoren nennt man *quantifizieren*.

Beachte die Analogien in der Schreibweise:

$$\bigwedge \longleftrightarrow \wedge \qquad \text{und} \qquad \bigvee \longleftrightarrow \vee .$$

Ist $A(\ ,\ )$ ein zweistelliges Prädikat, so sind

$$B(y) :\iff \bigwedge_x A(x,y)$$

$$C(y) :\iff \bigvee_x A(x,y)$$

wieder Aussageformen. Man nennt x eine *gebundene* -, y eine *freie Variable*. Gebundene - und freie Variablen treten in verschiedenen Bereichen der Mathematik auf, z.B.:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 \quad , \quad \int_a^b \ln t\, dt \ .$$

Hier sind k, t gebundene, n, a, b freie Variable.

Gebundene Variablen können durch beliebige andere Variable, die nicht in der Aussageform vorkommen, ersetzt werden. So sind

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \sum_{l=1}^{n} l^2 = \sum_{\alpha=1}^{n} \alpha^2$$

und

$$\int_a^b \ln t\, dt = \int_a^b \ln y\, dy = \int_a^b \ln x\, dx$$

jeweils die gleichen Aussageformen, dagegen bedeuten

$$\sum_{k=1}^{n} n^2 \qquad \text{und} \qquad \int_a^b \ln b \, db$$

etwas Anderes.

Durch zweifaches Quantifizieren erhält man aus $A(\ ,\ )$ acht Aussagen:

$$\bigwedge_x \bigwedge_y A(x,y) \qquad\qquad \bigwedge_x \bigvee_y A(x,y)$$

$$\bigvee_x \bigwedge_y A(x,y) \qquad\qquad \bigvee_x \bigvee_y A(x,y)$$

und die entsprechenden vier anderen, wenn x unter dem inneren und y unter dem äußeren Quantor steht.

Diese mit verschiedenen Quantoren versehenen Aussagen sind dann wie folgt zu lesen:

$\bigwedge_x \bigwedge_y A(x,y)$:	Für alle x und für alle y gilt $A(x,y)$.
$\bigwedge_x \bigvee_y A(x,y)$:	Für alle x existiert ein y, so daß $A(x,y)$ gilt.
$\bigvee_x \bigwedge_y A(x,y)$:	Es existiert ein x, so daß für alle y $A(x,y)$ gilt.
$\bigvee_x \bigvee_y A(x,y)$:	Es existiert ein x, und es existiert ein y, so daß $A(x,y)$ gilt.

Die logischen Regeln für den Umgang mit Quantoren, genauer: Tautologien, in denen Quantoren auftreten, heißen *Quantorenregeln*.

Satz 1.4 (de Morgan'sche Regeln)

Sei $A(\cdot)$ ein einstelliges Prädikat. Dann sind die folgenden Aussageformen Tautologien:

(i) $\neg \left[\bigwedge_x A(x)\right] \iff \bigvee_x \left[\neg A(x)\right]$

(ii) $\neg \left[\bigvee_x A(x)\right] \iff \bigwedge_x \left[\neg A(x)\right]$

Die rechten und linken Seiten sind also jeweils logisch äquivalente Aussageformen:

(i) $\neg \left[\bigwedge_x A(x)\right] \equiv \bigvee_x \left[\neg A(x)\right]$

(ii) $\neg \left[\bigvee_x A(x)\right] \equiv \bigwedge_x \left[\neg A(x)\right]$

Enthält das Prädikat $A(\ )$ nur endlich viele Subjekte, so erfolgt der Beweis der de Morgan'schen Regeln aus den Tautologien

$$\begin{aligned} \neg\,(A \wedge B) &\equiv \neg A \ \vee\ \neg B\ , \\ \neg\,(A \vee B) &\equiv \neg A \ \wedge\ \neg B\ . \end{aligned}$$

Bemerkung

Die de Morgan'schen Regeln erlauben es, das Eingangsbeispiel 1.1 noch einmal aufzugreifen, um genauer untersuchen zu können, was eigentlich gemeint ist.

> Der Erhöhungssatz ermäßigt sich um 5 vom Hundert bei Wohnraum,
> der nicht mit einer Zentralheizung und einem Bad ausgestattet ist.

Folgende drei Möglichkeiten bieten sich an:

(i) Der Erhöhungssatz ermäßigt sich um 5 vom Hundert bei Wohnraum, der nicht (mit einer Zentralheizung und einem Bad) ausgestattet ist:

$$\neg(\mathrm{ZH}\ \wedge\ \mathrm{B}) \quad\Longleftrightarrow\quad \neg\mathrm{ZH}\ \vee\ \neg\mathrm{B}$$

Diese Regelung ist die sog. mieterfreundliche Regelung, welche vom Gesetzgeber so gewollt war und letztendlich dann auch umgesetzt wurde.

(ii) Der Erhöhungssatz ermäßigt sich um 5 vom Hundert bei Wohnraum, der (nicht mit einer Zentralheizung) und einem Bad ausgestattet ist:

$$\neg\mathrm{ZH}\ \wedge\ \mathrm{B}$$

Diese Regelung ist unter mathematischen Gesichtspunkten (Hierarchie der Junktoren ohne Klammerung) die korrekte Umsetzung der sprachlichen Regelung; offenbar ist sie aber nicht sinnvoll.

(iii) Der Erhöhungssatz ermäßigt sich um 5 vom Hundert bei Wohnraum, der nicht mit einer Zentralheizung und (nicht mit) einem Bad ausgestattet ist:

$$\neg\mathrm{ZH}\ \wedge\ \neg\mathrm{B} \quad\Longleftrightarrow\quad \neg(\mathrm{ZH}\ \vee\ \mathrm{B})$$

Diese Regelung ist die sog. vermieterfreundliche Regelung, welche vom Gesetzgeber so nicht gewollt war. In besserem deutsch würde sie wohl lauten:

> Der Erhöhungssatz ermäßigt sich um 5 vom Hundert bei Wohnraum, der weder mit einer Zentralheizung, noch mit einem Bad ausgestattet ist.

Wie man sieht, fehlt im Gesetzestext die „Klammerung“. Deshalb hätte es dort einer weniger mißverständlichen Formulierung bedurft, um auszudrücken, was man meint.

Weitere Quantorenregeln

$$\begin{array}{rcl}
\bigwedge\limits_x \left[A(x) \wedge B(x)\right] & \equiv & \bigwedge\limits_x A(x) \;\wedge\; \bigwedge\limits_x B(x) \\[2ex]
\bigvee\limits_x \left[A(x) \vee B(x)\right] & \equiv & \bigvee\limits_x A(x) \;\vee\; \bigvee\limits_x B(x) \\[2ex]
\left[\bigwedge\limits_x A(x) \vee \bigwedge\limits_x B(x)\right] & \models & \bigwedge\limits_x \left[A(x) \vee B(x)\right] \\[2ex]
\bigvee\limits_x \left[A(x) \wedge B(x)\right] & \models & \left[\bigvee\limits_x A(x) \wedge \bigvee\limits_x B(x)\right] \\[2ex]
\bigwedge\limits_x \left[A(x) \Rightarrow B(x)\right] & \models & \left[\bigvee\limits_x A(x) \Rightarrow \bigvee\limits_x B(x)\right] \\[2ex]
\bigwedge\limits_x \left[A(x) \Rightarrow B(x)\right] & \models & \left[\bigwedge\limits_x A(x) \Rightarrow \bigwedge\limits_x B(x)\right] \\[2ex]
\bigwedge\limits_x \bigwedge\limits_y A(x,y) & \equiv & \bigwedge\limits_y \bigwedge\limits_x A(x,y) \\[2ex]
\bigvee\limits_x \bigvee\limits_y A(x,y) & \equiv & \bigvee\limits_y \bigvee\limits_x A(x,y) \\[2ex]
\bigvee\limits_x \bigwedge\limits_y A(x,y) & \models & \bigwedge\limits_y \bigvee\limits_x A(x,y)
\end{array}$$

Die weiter innen stehenden quantifizierten Variablen können von den weiter außen stehenden Variablen abhängen. Daher darf z.B. in der letzten Regel „$\models$“ nicht durch „$\equiv$“ ersetzt werden, weil i.a.

$$\bigvee\limits_x \bigwedge\limits_y A(x,y) \qquad \text{und} \qquad \bigwedge\limits_y \bigvee\limits_x A(x,y)$$

Aussagen mit verschiedenen Wahrheitswerten sind, wie das folgende Beispiel beleuchten möge:

$$A(x,y): \iff \quad x \text{ wird von } y \text{ auf Händen getragen.}$$

Wenn man jetzt für x Namen von Frauen und für y Namen von Männern zuläßt, so bedeutet

$$\bigwedge\limits_y \bigvee\limits_x A(x,y):$$

Zu jedem Mann gibt es eine Frau, die von ihm auf Händen getragen wird.

Dagegen bedeutet

$$\bigvee_x \bigwedge_y A(x,y):$$

Es gibt eine Frau, die von allen Männern auf Händen getragen wird.

Wie im einzelnen Fall aus einer wahren Aussage (*Formel*) eine andere wahre Aussage abgeleitet oder *deduziert* wird, ist innerhalb der einzelnen Logikkalküle unterschiedlich. Besonders bekannt sind Kalküle auf der Grundlage einer *Axiomatik* (Beispiel: Boole'sche Algebra). Allerdings müssen die Axiome eines Prädikatenkalküls auch die Quantoren einbeziehen.

Ferner gibt es Kalküle, die auf Grundregeln aufbauen und Angaben darüber enthalten, welche Bedingungen erfüllt sein müssen, damit eine Folge von Regelanwendungen einen Beweis oder eine Ableitung ergibt. Diese Formen heißen *Kalküle des natürlichen Schließens*. Die aus dem Kalkül der Quantorenlogik stammenden Quantorenregeln sind nun verträglich mit den Kalkülen des natürlichen Schließens. Diese lassen sich exemplarisch so beschreiben:

Sind etwa $A(\cdot)$ und $B(\cdot)$ Prädikate mit natürlichen Zahlen als zulässigen Subjekten, dann darf man bei der Untersuchung der Aussage

$$\bigwedge_n \left[A(n) \;\Rightarrow\; B(n)\right]$$

so vorgehen, indem man beginnt mit: Sei n eine natürliche Zahl. Dann darf (die Variable) n behandelt werden wie der Name einer festen natürlichen Zahl (Subjekt) und folglich die Aussageformen $A(n)$ und $B(n)$, als wären es Aussagen. Läßt sich dann $A(n) \Rightarrow B(n)$ ableiten, so ist obige Allaussage bewiesen.

Beispiel 1.15

$$\begin{array}{lcl} A_1(n): & \Longleftrightarrow & n \text{ ist durch 2 teilbar} \\ A_2(n): & \Longleftrightarrow & n \text{ ist durch 3 teilbar} \\ B(n): & \Longleftrightarrow & n \text{ ist durch 6 teilbar} \end{array}$$

Beh.: $\bigwedge_n \left[A_1(n) \wedge A_2(n) \;\Rightarrow\; B(n)\right]$

Bew. Sei n eine natürliche Zahl.

1. Fall:
n ist nicht durch 2 oder nicht durch 3 teilbar. In diesem Fall ist die Voraussetzung $A_1(n) \wedge A_2(n)$ falsch, also die Implikation $[A_1(n) \wedge A_2(n)] \Rightarrow B(n)$ wahr.

2. Fall:
n ist durch 2 und durch 3 teilbar. Dann gibt es natürliche Zahlen m und l mit der Eigenschaft

$$n = 2m = 3l.$$

Dann ist $3l$ eine gerade Zahl, folglich auch l selbst (wäre l nämlich ungerade, dann wäre es auch $3l$). Da also l gerade ist, existiert eine natürliche Zahl k mit der Eigenschaft $l = 2k$. Aus der obenstehenden Gleichung mit n folgt daher

$$n \;=\; 2m \;=\; 3l \;=\; 3(2k) \;=\; 6k.$$

Damit gilt $B(n)$, also ist die Implikation $[A_1(n) \wedge A_2(n)] \Rightarrow B(n)$ wahr.

Die Aussage in der Behauptung ist damit bewiesen.

Kapitel 2

Mengenlehre

2.1 Definition und Beispiele

Die Umgangssprache benutzt das Wort „Menge“ üblicherweise, um eine Ansammlung zahlreicher Gegenstände zu bezeichnen:

> In dem Korb befinden sich eine Menge Äpfel.
>
> Bedeutung: In dem Korb befinden sich viele Äpfel.

Auch wird umgangssprachlich damit oft eine Fähigkeit ausgedrückt:

> Mein Freund hat eine Menge Kraft.
>
> Bedeutung: Mein Freund ist sehr kräftig, hat viel Kraft.

In der Mathematik hat der Begriff einer Menge mit solchen unbestimmten Größenvorstellungen nichts zu tun. Hier versteht man unter einer Menge eine gedankliche Zusammenfassung gegebener Objekte zu einem Ganzen. Es gibt Mengen, welche nur aus einem Objekt oder Element bestehen. Es ist sogar nützlich, eine Menge einzuführen, die kein einziges Element besitzt.

Definition 2.1 (Georg Cantor, 1845-1918)

Unter einer *Menge* verstehen wir jede Zusammenfassung $\mathcal{M}$ von bestimmten, wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die Elemente von $\mathcal{M}$ genannt werden) zu einem Ganzen.

Erläuterungen:

- *bestimmt:* Von jedem Objekt des Universums muß feststellbar sein, ob es zur fraglichen Menge gehört oder nicht.
- *wohlunterschieden:* Jedes Element von $\mathcal{M}$ kommt genau einmal in $\mathcal{M}$ vor. Davon unberührt bleibt die Tatsache, daß es bei der Aufzählung u.U. mehrmals auftritt, s.u..

Bemerkung:

Dieser sog. „naive“ Mengenbegriff ist problematisch, da seine konsequente Anwendung zu *Antinomien*, d.h. Widersprüchen führt; vgl. dazu die Bemerkung auf p. 32.

Definition 2.2

(i) $x \in \mathcal{M}$ heißt: x ist *Element* von $\mathcal{M}$.

(ii) $x \notin \mathcal{M}$ heißt: x ist nicht Element von $\mathcal{M}$.

(iii) $\mathcal{M} = \{1, 2, 3, 4\}$ heißt:
$\mathcal{M}$ ist die Menge, die aus den angegebenen vier Elementen besteht (*aufzählende Charakterisierung* von $\mathcal{M}$).

(iv) $\mathcal{M} = \{x : \ x \text{ hat die Eigenschaft } E\}$ heißt:
$\mathcal{M}$ ist die Menge aller Objekte x, die die Eigenschaft E haben (*beschreibende Charakterisierung* von $\mathcal{M}$).

Bemerkung

(i) $\{1, 2, 3\} = \{1, 3, 2\} = \{2, 3, 1\} = \{1, 1, 3, 2, 3\}$
Trotz des mehrmaligen Auftretens von Elementen gilt, daß Mengen jedes ihrer Elemente nur einmal enthalten.

(ii) Die aufzählende Charakterisierung läßt sich auch für nicht endliche (= unendliche) Mengen benutzen, allerdings muß dann die Bedeutung unzweideutig klar sein:

- $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \dots\} \ = \ \{x : \ x \text{ ist eine natürliche Zahl}\}$
  ist eine zulässige Schreibweise.
- $\{2,\ 3,\ 5,\ 7,\ \dots\} \ = \ \{p : \ p \text{ ist eine Primzahl}\}$
  ist keine zulässige Schreibweise.

(iii) Die beschreibende Charakterisierung einer Menge $\mathcal{M}$ erfolgt mit Hilfe einer Aussageform $E(\ )$:

$$\mathcal{M} \ = \ \{x : \ x \text{ hat die Eigenschaft } E\} \ = \ \{x : \ E(x)\}.$$

Für einige häufig auftretenden Mengen hat man feststehende Bezeichnungen eingeführt. Dabei benutzt man das Zeichen

$$:=$$

(lies: „soll sein“, „ist definitionsgemäß gleich“), um anzudeuten, daß ein Ausdruck definiert werden soll. Auch das Zeichen $=:$ wird verwendet; verabredungsgemäß steht der Doppelpunkt dabei auf der Seite des zu definierenden Objektes.

$$\begin{aligned}
\mathbb{N} &:= \{1,2,3,4,\ldots\} \\
&\quad \textit{natürliche}\text{ Zahlen} \\
\mathbb{N}_0 &:= \{0,1,2,3,\ldots\} \\
&\quad \textit{natürliche}\text{ Zahlen mit 0} \\
\mathbb{Z} &:= \{0,-1,1,-2,2,\ldots\} = \{\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots\} \\
&\quad \textit{ganze}\text{ Zahlen} \\
\mathbb{Q} &:= \{x:\ x=\frac{a}{b},\ a,b\in\mathbb{Z},\ b\neq 0\} \\
&= \{x:\ x \text{ ist eine endliche oder periodische Dezimalzahl}\} \\
&\quad \textit{rationale}\text{ Zahlen} \\
\mathbb{R} &:= \{x:\ x \text{ ist ein Dezimalbruch}\} \\
&\quad \textit{reelle}\text{ Zahlen} \\
\mathbb{C} &:= \{x:\ x \text{ ist eine komplexe Zahl}\} \\
&\quad \textit{komplexe}\text{ Zahlen}
\end{aligned}$$

<u>Achtung:</u>

In der Mathematik gehört die Zahl 0 definitionsgemäß nicht zu den natürlichen Zahlen, in der Informatik dagegen schon! Dort ist i.a.

$$\mathbb{N} := \{0,1,2,3,\ldots\}$$

und heißt Menge der natürlichen Zahlen.

Eine Gesamtheit von Dingen, die nicht notwendigerweise alle verschieden sind, ist keine Menge; sie wird ein *System* genannt. Wie bei Mengen benutzt man auch hier die Schreibweise $a \in S$ um auszudrücken, daß a zu dem System S gehört.

2.2 Beziehungen zwischen Mengen

Definition 2.3

Seien $\mathcal{M}$ und $\mathcal{N}$ Mengen. Dann sind Gleichheit und Inklusion definiert durch

$$\begin{aligned}
\mathcal{M} = \mathcal{N} \quad &:\Longleftrightarrow \quad \bigwedge_x \left[x\in\mathcal{M} \Leftrightarrow x\in\mathcal{N}\right] \\
\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N} \quad &:\Longleftrightarrow \quad \bigwedge_x \left[x\in\mathcal{M} \Rightarrow x\in\mathcal{N}\right]
\end{aligned}$$

Im Falle $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$ heißt $\mathcal{M}$ eine *Teil-* oder *Untermenge* von $\mathcal{N}$, $\mathcal{N}$ heißt eine *Obermenge* von $\mathcal{M}$; auch die Schreibweise $\mathcal{N} \supseteq \mathcal{M}$ ist zulässig. Man sagt auch, $\mathcal{M}$ sei in $\mathcal{N}$ *enthalten* oder $\mathcal{N}$ *enthalte* oder *umfasse* $\mathcal{M}$. $\mathcal{M}$ wird eine *echte* Teilmenge von $\mathcal{N}$ genannt, wenn $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$ und gleichzeitig $\mathcal{M} \neq \mathcal{N}$ gilt; hierfür existieren auch die Schreibweisen $\mathcal{M} \subsetneq \mathcal{N}$ oder $\mathcal{M} \underset{\neq}{\subset} \mathcal{N}$. $\mathcal{M} \not\subseteq \mathcal{N}$ bedeutet, daß $\mathcal{M}$ keine Teilmenge von $\mathcal{N}$ ist, daß also mindestens ein Element von $\mathcal{M}$ nicht in $\mathcal{N}$ liegt.

Statt $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$ (bzw. $\mathcal{N} \supseteq \mathcal{M}$) schreibt man auch $\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$ (bzw. $\mathcal{N} \supset \mathcal{M}$). Auch bei diesen Schreibweisen ist jedoch $\mathcal{M} = \mathcal{N}$ nicht ausgeschlossen.

Sind $\mathcal{M} := \{x :\ A(x)\}$, $\mathcal{N} := \{x :\ B(x)\}$, so gilt aufgrund obiger Definition

$$\begin{aligned} \mathcal{M} = \mathcal{N} \quad &:\Longleftrightarrow \quad \bigwedge_x \ \big[A(x) \Leftrightarrow B(x)\big] \\ \mathcal{M} \subseteq \mathcal{N} \quad &:\Longleftrightarrow \quad \bigwedge_x \ \big[A(x) \Rightarrow B(x)\big] \end{aligned}$$

Beispiel 2.1

Es gilt die folgende Inklusionskette, wobei die Inklusionen alle echt sind:

$$\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{N}_0 \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R} \subsetneq \mathbb{C}.$$

Definition 2.4

Eine Menge, die kein Element enthält, heißt *leere Menge* und wird mit $\emptyset$ oder mit $\{\,\}$ bezeichnet; z.B.

$$\emptyset \;=\; \{x :\ A \wedge \neg A\} \;=\; \{x :\ x \neq x\}.$$

Lemma

Es gibt nur eine leere Menge, *die* leere Menge $\emptyset$.

Beweis

Es wird der korrekte Schluß

$$\neg A \;\Rightarrow\; (B \wedge \neg B) \quad \models \quad A$$

verwendet und gezeigt, daß aus $\neg A$ ein Widerspruch folgt.

Im Widerspruch zur Behauptung seien also $\emptyset$ und $\emptyset'$ zwei verschiedene leere Mengen. Dann gilt

$$\bigwedge_x \qquad x \in \emptyset \;\Longleftrightarrow\; x \in \emptyset'\ ,$$

da sowohl $x \in \emptyset$ als auch $x \in \emptyset'$ für jedes x falsch ist. Nach der Definition der Gleichheit von zwei Mengen heißt das aber: $\emptyset = \emptyset'$. Widerspruch zur Annahme!

Inklusion $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$:

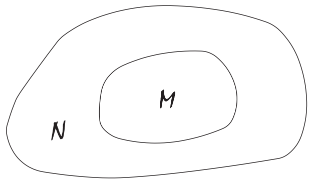

Abbildung 2.1: Inklusion

Beziehungen zwischen Mengen lassen sich besonders gut in sog. *Venn-Diagrammen*[1] veranschaulichen. Dazu repräsentiert man die Mengen durch Gebiete in der Ebene, s. Abb. 2.1.

Lemma

Für jede Menge $\mathcal{M}$ gilt: $\emptyset \subseteq \mathcal{M}$.

Beweis (indirekter Beweis)

Im Gegensatz zur Behauptung sei $\mathcal{M}$ eine Menge mit $\emptyset \not\subseteq \mathcal{M}$. Nach Definition der Inklusion gilt dann

$$\begin{aligned} \neg \left[\bigwedge_x (x \in \emptyset \Rightarrow x \in \mathcal{M}) \right] &\equiv \bigvee_x \neg\left[(x \in \emptyset \Rightarrow x \in \mathcal{M})\right] \\ &\equiv \bigvee_x \left[(x \in \emptyset \wedge x \notin \mathcal{M})\right] \end{aligned}$$

Das ist jedoch ein Widerspruch zur Definition der leeren Menge.

2.3 Mengenoperationen

Seien $\mathcal{M}$ und $\mathcal{N}$ Mengen. Dann sind die im folgenden aufgeführten Konstruktionen ebenfalls Mengen:

$\mathcal{M} \cap \mathcal{N}$	$:=$	$\{x : x \in \mathcal{M} \wedge x \in \mathcal{N}\}$	Durchschnitt
$\mathcal{M} \cup \mathcal{N}$	$:=$	$\{x : x \in \mathcal{M} \vee x \in \mathcal{N}\}$	Vereinigung
$\mathcal{M} \setminus \mathcal{N}$	$:=$	$\{x : x \in \mathcal{M} \wedge x \notin \mathcal{N}\}$	Differenz
$\mathcal{P}(\mathcal{M})$	$:=$	$\{x : x \subseteq \mathcal{M}\}$	Potenzmenge

[1] John Venn, englischer Mathematiker (1834-1923)

Durchschnitt $\mathcal{M} \cap \mathcal{N}$:

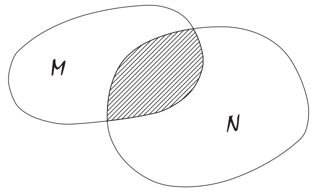

Abbildung 2.2: Durchschnitt

Vereinigung $\mathcal{M} \cup \mathcal{N}$:

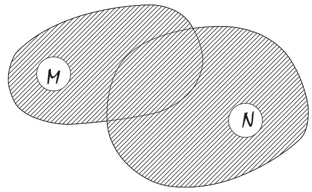

Abbildung 2.3: Vereinigung

Differenzmenge $\mathcal{M} \backslash \mathcal{N}$:

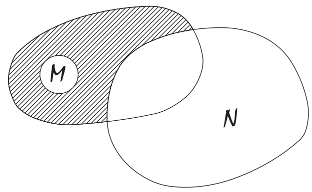

Abbildung 2.4: Differenzmenge

Sind $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ und $\mathcal{L}$ Mengen, dann gelten die folgenden Gesetze:

$$\left.\begin{array}{rcl} \mathcal{M} \cap \mathcal{N} & = & \mathcal{N} \cap \mathcal{M} \\ \mathcal{M} \cup \mathcal{N} & = & \mathcal{N} \cup \mathcal{M} \end{array}\right. \quad \text{Kommutativität}$$

$$\left.\begin{array}{rcl} (\mathcal{M} \cap \mathcal{N}) \cap \mathcal{L} & = & \mathcal{M} \cap (\mathcal{N} \cap \mathcal{L}) \\ (\mathcal{M} \cup \mathcal{N}) \cup \mathcal{L} & = & \mathcal{M} \cup (\mathcal{N} \cup \mathcal{L}) \end{array}\right. \quad \text{Assoziativität}$$

$$\left.\begin{array}{rcl} (\mathcal{M} \cap \mathcal{N}) \cup \mathcal{L} & = & (\mathcal{M} \cup \mathcal{L}) \cap (\mathcal{N} \cup \mathcal{L}) \\ (\mathcal{M} \cup \mathcal{N}) \cap \mathcal{L} & = & (\mathcal{M} \cap \mathcal{L}) \cup (\mathcal{N} \cap \mathcal{L}) \end{array}\right. \quad \text{Distributivität}$$

Definition 2.5

Sei Ω eine Menge. Dann bezeichne für jede Teilmenge $\mathcal{A} \subseteq \Omega$

$$\complement_\Omega \mathcal{A} \;:=\; \Omega \setminus \mathcal{A},$$

genannt das *Komplement* von $\mathcal{A}$ bzgl. Ω. Wenn klar ist, welche „Obermenge“ Ω gemeint ist, schreibt man auch $\complement\, \mathcal{A}$ anstelle von $\complement_\Omega \mathcal{A}$.

Beispiel 2.2

Sei $\mathcal{M} := \{a, b\}$. Dann ist

$$\mathcal{P}(\mathcal{M}) \;=\; \big\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \mathcal{M}\big\}.$$

Die leere Menge $\emptyset$ und die volle Menge $\mathcal{M}$ sind stets Teilmengen von $\mathcal{M}$, also Elemente von $\mathcal{P}(\mathcal{M})$. Sie heißen daher die *trivialen Teilmengen.*

Satz 2.1 (Regeln von de Morgan)

Seien Ω eine Menge und $\mathcal{M}, \mathcal{N} \subseteq \Omega$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\complement_\Omega\,(\mathcal{M} \cup \mathcal{N}) &= \complement_\Omega\,(\mathcal{M}) \;\cap\; \complement_\Omega\,(\mathcal{N}) \\
\complement_\Omega\,(\mathcal{M} \cap \mathcal{N}) &= \complement_\Omega\,(\mathcal{M}) \;\cup\; \complement_\Omega\,(\mathcal{N})
\end{aligned}$$

<u>In Worten:</u>

Das Komplement der Vereinigung ist gleich dem Durchschnitt der Komplemente.
Das Komplement des Durchschnittes ist gleich der Vereinigung der Komplemente.

Graphischer Nachweis der 1. Regel von de Morgan:

$$\begin{aligned}
&\complement_\Omega\,(\mathcal{M} \cup \mathcal{N}) \;= \\
&\complement_\Omega\,(\mathcal{M}) \;\cap\; \complement_\Omega\,(\mathcal{N})
\end{aligned}$$

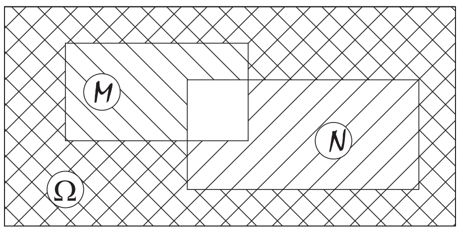

Abbildung 2.5: de Morgan Regel

Beweis der 1. Regel von de Morgan

<u>„$\subseteq$“:</u>

$$\begin{array}{lcl}
x \in \complement_\Omega\,(\mathcal{M} \cup \mathcal{N}) & \longrightarrow & x \in \Omega \setminus (\mathcal{M} \cup \mathcal{N}) \\
 & \longrightarrow & x \in \Omega \;\wedge\; x \notin (\mathcal{M} \cup \mathcal{N}) \\
 & \longrightarrow & x \in \Omega \;\wedge\; \neg\,(x \in \mathcal{M} \vee x \in \mathcal{N}) \\
 & \longrightarrow & x \in \Omega \;\wedge\; x \notin \mathcal{M} \wedge x \notin \mathcal{N} \\
 & \longrightarrow & x \in \Omega \;\wedge\; x \in C_\Omega\mathcal{M} \wedge x \in C_\Omega\mathcal{N} \\
 & \longrightarrow & x \in \; \complement_\Omega\,\mathcal{M} \cap \complement_\Omega\,\mathcal{N}
\end{array}$$

„$\supseteq$“:

Diese Inklusion zeigt man indem man die obige Argumentationskette rückwärts vollzieht.

Definition 2.6

Sei S ein System von Mengen.

(i) Die *Vereinigung der Mengen*, die zu S gehören, ist definiert als

$$\bigcup_{\mathcal{M}\in S} \mathcal{M} \;:=\; \{x : \bigvee_{\mathcal{A}\in S} x \in \mathcal{A}\}$$

(ii) Der *Durchschnitt der Mengen*, die zu S gehören, ist definiert als

$$\bigcap_{\mathcal{M}\in S} \mathcal{M} \;:=\; \{x : \bigwedge_{\mathcal{A}\in S} x \in \mathcal{A}\}$$

Man kann zeigen, daß die de Morgan'schen Regeln auch für Systeme von Mengen gelten.

Bemerkung (Widersprüchlichkeit der Mengendefinition)

Die sogenannte Mengenlehre ist von Georg Cantor (1845-1918) begründet worden. Auf der einen Seite haben tiefere Untersuchungen unendlicher Mengen zu zwar seltsam anmutenden, aber doch erhellenden Resultaten geführt; einige davon werden in Abschnitt 2.6 vorgestellt. Auf der anderen Seite führt der hier vorgestellte Mengenbegriff zu Widersprüchen (sog. *Antinomien*), die gegen Ende des 19. Jahrhunderts eine tiefe Krise der Mathematik auslösten. Als ein Beispiel sei hier die *Russell'sche Antinomie*[2] in einer der vielen anekdotenhaften Formen vorgestellt:

> Der Barbier eines Dorfes erhält von seinem Bürgermeister den Auftrag, alle diejenigen Männer des Dorfes zu rasieren, die sich nicht selbst rasieren.
>
> Frage:
>
> Rasiert er sich selbst auch?
>
> Antwort:
>
> Wenn er sich nicht selbst rasiert, dann muß er sich rasieren; rasiert er sich aber selbst, dann darf er sich nicht rasieren. Er rasiert sich also genau dann, wenn er sich nicht rasiert.

[2] Bertrand Russell, 1872-1970, englischer Mathematiker und Philosoph

Damit der Bezug dieser Anekdote zur Sprache der Mengenlehre für den Anfänger deutlich wird, sei die dazu gehörende formale Ebene hier kurz vorgestellt. Seien b der Barbier,

$$R(x) \quad :\Longleftrightarrow \quad x \text{ rasiert sich selbst}$$

und $\mathcal{M}$ die Menge derjenigen männlichen Bewohner des Dorfes D, die sich nicht selbst rasieren:

$$\mathcal{M} \ := \ \{x: \ x \in D, \ \neg R(x)\}.$$

Dann lautet unsere Frage: gilt $b \in \mathcal{M}$?

(a) Sei $b \in \mathcal{M}$. Dann gilt $\neg R(b)$, also ist $R(b)$ falsch. Also rasiert b sich nicht selbst. Dann muß b sich aber rasieren, d.h. es gilt $R(b)$. Damit dann: $b \notin \mathcal{M}$.

(b) Sei $b \notin \mathcal{M}$. Dann gilt $\neg\neg R(b) = R(b)$, also ist $R(b)$ wahr. Also rasiert b sich selbst. Dann darf b sich aber nicht rasieren, d.h. es gilt $\neg R(b)$. Damit dann: $b \in \mathcal{M}$.

(c) Insgesamt erhält man das absurde Ergebnis

$$R(b) \iff \neg R(b) \qquad \text{bzw.} \qquad b \notin \mathcal{M} \iff b \in \mathcal{M}$$

Da sich diese Antinomie aus dem Mengenbegriff ergibt, muß auch ihre Behebung daselbst ansetzen. Wie man dabei vorzugehen hat, soll hier nicht dargelegt werden, es soll nur darauf hingewiesen werden, daß man den mengentheoretischen Antinomien dadurch entgehen kann, daß man Mengen nicht hemmungslos bildet: Menge aller Mengen, ... Die Mengen, mit denen wir es zu tun haben, werden immer nur Teilmengen einer im vorhinein festgelegten Grundmenge sein.

2.4 Mengenoperationen und Aussageformen

Alle der bisher eingeführten Mengenoperationen, Inklusions- und Gleichheitsaussagen lassen sich in die Junktoren- und Aussageformsprache übersetzen. Seien dazu Ω eine Menge und $\mathcal{K}, \mathcal{L}, \mathcal{M}$ Teilmengen von Ω und gelte

$$\mathcal{K} := \{x: \bigwedge_x K(x)\}\ , \qquad \mathcal{L} := \{x: \bigwedge_x L(x)\}\ , \qquad \mathcal{M} := \{x: \bigwedge_x M(x)\}$$

mit geeigneten Prädikaten $K(\ ),\ L(\ ),\ M(\ )$. Dann gilt der folgende „Übersetzungsschlüssel“:

$\mathcal{K}$	$\mathcal{L}$	$\mathcal{M}$	$\complement$	$\cap$	$\cup$	$\subseteq$	$=$	$\emptyset$
$K(x)$	$L(x)$	$M(x)$	$\neg$	$\wedge$	$\vee$	$\Rightarrow$	$\Leftrightarrow$	$A \wedge \neg A$

Die entsprechend entstandene Aussageform, versehen mit $\bigwedge_x$, hat dann die gleiche Bedeutung wie die in der „Mengensprache“ erzeugte Zeichenreihe, also z.B.

$$\begin{aligned}
\mathcal{K} \subseteq \mathcal{L} \quad &\Longleftrightarrow \quad \bigwedge_x \big[K(x) \Rightarrow L(x)\big] \\
(\mathcal{K} \cap \mathcal{L}) \subseteq (\mathcal{K} \cup \mathcal{L}) \quad &\Longleftrightarrow \quad \bigwedge_x \big([K(x) \wedge L(x)] \Rightarrow [K(x) \vee L(x)]\big) \\
\mathcal{K} \cap \complement_{\mathcal{K}} = \emptyset \quad &\Longleftrightarrow \quad \bigwedge_x \big([K(x) \wedge \neg K(x)] \Rightarrow [A \wedge \neg A]\big)
\end{aligned}$$

Sollen in einer Allaussage $\bigwedge_x A(x)$ oder in einer Existenzaussage $\bigvee_x A(x)$ nicht alle x zur Konkurrenz zugelassen werden, sondern nur x aus einer Menge $\mathcal{M}$, so sind die folgenden Schreibweisen üblich:

Allquantor	Existenzquantor
$\bigwedge_x \big[x \in \mathcal{M} \;\Rightarrow\; A(x)\big]$	$\bigvee_x \big[x \in \mathcal{M} \;\wedge\; A(x)\big]$
$\bigwedge_{x \in \mathcal{M}} A(x)$	$\bigvee_{x \in \mathcal{M}} A(x)$
$A(x) \qquad (x \in \mathcal{M})$	$A(x) \qquad (x \in \mathcal{M}$ geeignet$)$

Man beachte, daß in der ersten Zeile einmal „$\Rightarrow$“ und einmal „$\wedge$“ steht. Damit zeigt man dann, daß

$$\neg \Big(\bigwedge_x \big[x \in \mathcal{M} \;\Rightarrow\; A(x)\big]\Big) \quad \equiv \quad \bigvee_x \big[x \in \mathcal{M} \;\wedge\; \neg\, A(x)\big]$$

gilt.

Im folgenden werden All- und Existenzaussagen meistens gemäß der letzten Zeile der obigen Darstellungen formuliert. Das Wort „geeignet“ in einer Existenzaussage bedeutet dabei nicht, daß es geeignete oder ungeeignete $x \in \mathcal{M}$ gibt sondern nur, daß es (wenigstens) eins gibt.

Beispiel 2.3

$$\begin{aligned}
\bigwedge_x \big(\, x \in \mathbb{R} \;\Rightarrow\; \mathrm{e}^x > 0 \,\big) \quad &\Longleftrightarrow \quad \mathrm{e}^x > 0 \quad (x \in \mathbb{R}) \\
\bigvee_x \big(\, x \in (0,\pi) \;\wedge\; \cos x = 0 \,\big) \quad &\Longleftrightarrow \quad \cos x = 0 \quad (x \in \mathbb{R} \text{ geeignet})
\end{aligned}$$

2.5 Relationen

Oft treten zwei oder mehr Elemente von Mengen in eine Beziehung, bei der es auf die Reihenfolge der Elemente ankommt.

Beispiel 2.4
Seien

$$\mathcal{T} := \{1, 2, 3, \ldots, 31\}\ , \quad \mathcal{M} := \{1, 2, 3, \ldots, 12\}\ , \quad \mathcal{J} := \{1, 2, 3, \ldots, 2000\}\ .$$

Mit den Elementen $t := 5 \in \mathcal{T}$, $m := 7 \in \mathcal{M}$, $j := 1986 \in \mathcal{J}$ wird das folgende, aus diesen drei Elementen bestehende „Objekt“ d gebildet:

$$d \ := \ 7/5/1986.$$

Nach in Europa herrschender Sichtweise handelt es sich dabei um das Datum des 7. Mai 1986. Zeigt man dieses Objekt d hingegen einem Amerikaner, so wird er/sie es unschwer als das Datum des 5. Juli 1986 identifizieren: Amerikaner schreiben beim Datum zuerst den Monat, dann den Tag, dann das Jahr.

Dieses Beispiel zeigt, daß es bei Benutzung mehrerer Zahlen „gleichzeitig“ auf die Reihenfolge ankommen kann, in welcher diese Zahlen auftreten; dazu kommt noch, daß jedem das Bildungsgesetz dieser Reihenfolge bekannt sein muß. So macht es keinen Sinn, obiges Datum einfach als Menge $d = \{5, 7, 1986\}$ anzugeben, denn bekanntlich kommt es bei der aufzählenden Schreibweise der Elemente einer Menge nicht auf die Reihenfolge ihrer Elemente an:

$$d \ = \ \{5, 7, 1986\} \ = \ \{7, 5, 1986\} \ = \ \{1986, 5, 7\} \ = \ \ldots$$

2.5.1 Geordnete Paare

Bezeichnung
Seien $\mathcal{M}$ und $\mathcal{N}$ Mengen. Für $x \in \mathcal{M}$, $y \in \mathcal{N}$ wird das *geordnete Paar* oder *Dupel* mit dem Ausdruck

$$\langle x, y \rangle$$

bezeichnet.

Bemerkung

(i) Der Begriff des geordneten Paares ist dadurch nicht *definiert* worden, sondern es wurde nur ein Ausdruck angegeben, mit dem er *bezeichnet* wird. Der Grund liegt darin, daß die formale mengentheoretische Definition etwas unhandlich ist und im weiteren Verlauf auch nicht benötigt wird; Interessierte seien auf den zweiten Teil dieser Bemerkung verwiesen. Wichtig ist hier vor allem, daß im Gegensatz zu einer Aufzählung in einer Menge die Reihenfolge des Auftretens der Elemente in einem geordneten Paar zentral ist:

$$\bigwedge_{x,y} \qquad x \neq y \qquad \Longrightarrow \qquad \{x, y\} = \{y, x\} \quad \wedge \quad \langle x, y \rangle \neq \langle y, x \rangle$$

(ii) Die eigentliche Definition eines geordneten Paares lautet:

Seien $\mathcal{M}$ und $\mathcal{N}$ Mengen. Für $x \in \mathcal{M}, y \in \mathcal{N}$ wird das *geordnete Paar* oder *Dupel* definiert durch

$$\langle x, y \rangle := \big\{\{x\}, \{x, y\}\big\}.$$

Beh.

$$\langle x, y \rangle = \langle s, t \rangle \iff (x = s \ \wedge \ y = t) \qquad (x, s \in \mathcal{M}, y, t \in \mathcal{N})$$

Beweis

Seien $x, s \in \mathcal{M},\ y, t \in \mathcal{N}$ und gelte

$$\langle x, y \rangle = \big\{\{x\}, \{x, y\}\big\} = \big\{\{s\}, \{s, t\}\big\} = \langle s, t \rangle.$$

Dann gibt es für diese (höchstens) zweielementigen Mengen die beiden Möglichkeiten

$$\{x\} = \{s\} \ \wedge \ \{x, y\} = \{s, t\} \quad \vee \quad \{x\} = \{s, t\} \ \wedge \ \{x, y\} = \{s\},$$

welche im folgenden untersucht werden:

- $\{x\} = \{s\} \quad \longrightarrow \quad x = s.$
  $\{x, y\} = \{s, t\} = \{x, t\} \quad \longrightarrow \quad y = t.$
  Insgesamt folgt hier: $x = s \ \wedge \ y = t.$
- $\{x\} = \{s, t\} \quad \longrightarrow \quad x = s = t$
  $\{x, y\} = \{s\} \quad \longrightarrow \quad x = y = s$
  Insgesamt folgt hier: $x = y = s = t.$

Entsprechend werden *Tripel, Quadrupel* , allgemein *n-Tupel* ($n \in \mathbb{N}$ geeignet) so definiert, daß beweisbar ist:

Sind $\mathcal{M}_1, \ldots, \mathcal{M}_n$ Mengen, dann gilt für $\quad x_i, y_i \in \mathcal{M}_i \quad (i \in \{1, \ldots, n\})$:

$$\langle x_1, \ldots, x_n \rangle = \langle y_1, \ldots, y_n \rangle \iff x_i = y_i \qquad (i \in \{1, \cdots, n\})$$

Definition 2.7

(i) Seien $\mathcal{M}$ und $\mathcal{N}$ Mengen. Die Menge

$$\mathcal{M} \times \mathcal{N} := \{p : \bigvee_{x \in \mathcal{M}} \bigvee_{y \in \mathcal{N}} p = \langle x, y \rangle\} = \{\langle x, y \rangle : x \in \mathcal{M}, \ y \in \mathcal{N}\}$$

heißt *kartesisches Produkt* von $\mathcal{M}$ und $\mathcal{N}$ oder die *Produktmenge* von $\mathcal{M}$ und $\mathcal{N}$, gesprochen: „$\mathcal{M}$ Kreuz $\mathcal{N}$“.

(ii) Seien $n \in \mathbb{N}$, $i \in \{1, \ldots, n\}$ und $\mathcal{M}_i$ Mengen. Die Menge

$$\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2 \times \ldots \times \mathcal{M}_n \ := \ \big\{ \langle x_1, \ldots, x_n \rangle : \ x_i \in \mathcal{M}_i, \ i \in \{1, \ldots, n\} \big\}$$

heißt das *n-fache kartesische Produkt* der Mengen $\mathcal{M}_1$ bis $\mathcal{M}_n$.

(iii) Im Falle $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_2 = \ldots = \mathcal{M}_n =: \mathcal{M}$ schreibt man

$$\mathcal{M}^n \ := \ \mathcal{M} \times \mathcal{M} \times \ldots \times \mathcal{M} \ = \ \mathop{\times}_{i=1}^{n} \mathcal{M} \ .$$

Gesprochen: „$\mathcal{M}$ n“, nicht: “$\mathcal{M}$ hoch n“.

Bemerkung

(i) A priori ist nicht klar, daß es sich bei $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$ tatsächlich um eine Menge handelt. Aus der Definition

$$\langle x, y \rangle \ = \ \big\{ \{x\}, \{x, y\} \big\}$$

erkennt man jedoch, daß gilt:

$$\mathcal{M} \times \mathcal{N} \ \subseteq \ \mathcal{P}\,[\,\mathcal{P}(\mathcal{M} \cup \mathcal{N})\,],$$

und bei der Potenzmenge handelt es sich um eine Menge.

(ii) Für alle $x \in \mathcal{M}$, $y \in \mathcal{N}$ gilt

$$\begin{aligned} \{x, y\} \ &= \ \{y, x\} \ , \qquad \text{i.a. aber} \\ \langle x, y \rangle \ &\neq \ \langle y, x \rangle. \end{aligned}$$

(iii) Für alle $x, s \in \mathcal{M}$, $y, t \in \mathcal{N}$ gilt

$$\langle x, y \rangle = \langle s, t \rangle \quad \Longleftrightarrow \quad x = s \ \wedge \ y = t$$

Beispiele 2.5

(i) Teilmengen von $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ (Gitternetz im $\mathbb{R}^2$)

(ii) Teilmengen von $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

$$\{x : \ 0 \le x \le 1\} \times \mathbb{R} \ \neq \ \mathbb{R} \times \{y : \ 0 \le y \le 1\}$$

(iii) Reihen und Plätze bei Theaterkarten

Definition 2.8

(i) Eine Teilmenge $\mathcal{R}$ von $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$ heißt eine *Relation zwischen $\mathcal{M}$ und $\mathcal{N}$*.

(ii) Im Falle $\mathcal{M} = \mathcal{N}$, also $\mathcal{M}^2 = \mathcal{M} \times \mathcal{M}$, heißt eine Teilmenge $\mathcal{R}$ von $\mathcal{M}^2$ eine *Relation in* $\mathcal{M}$.

Bemerkung

Ist $A(\ ,\ )$ ein zweistelliges Prädikat und sind die Elemente einer Menge $\mathcal{M}$ zulässige Variablen für die erste -, die Elemente einer Menge $\mathcal{N}$ zulässige Variablen für die zweite Stelle von $A(\ ,\ )$, dann ist durch $A(\ ,\ )$ eine Relation erklärt:

$$\mathcal{R} \ := \ \{\langle x, y\rangle : \ A(x,y)\}.$$

So wie man einstellige Prädikate mit Mengen identifizieren kann:

$$\mathcal{M} \ := \ \{x : \ B(x)\},$$

so sind also zweistellige Prädikate mit Relationen identifizierbar.

2.5.2 Abbildung

Beispiel 2.6

Seien $\mathcal{S} := \{s_1, s_2, \ldots, s_{24}\}$ die Menge der Stunden eines Tages und $\mathcal{Z} := \{1, 2, \ldots, 12\}$ die Menge der Ziffern von 1 bis 12. Dann läßt sich auf folgende Weise eine Relation zwischen $\mathcal{S}$ und $\mathcal{Z}$ definieren:

$$\begin{aligned} \mathcal{UZ} &:= \big\{\langle s_i, t\rangle,\ s_i \in \mathcal{S},\ t \in \mathcal{Z},\ (i-t) \in \{0, 12\}\big\} \\ &= \{\langle s_1, 1\rangle, \ldots, \langle s_{12}, 12\rangle, \langle s_{13}, 1\rangle, \ldots, \langle s_{24}, 12\rangle\}. \end{aligned}$$

Die „ersten“ 12 Stunden einerseits und die „zweiten“ 12 Stunden andererseits stehen dabei mit den Ziffern $1, \ldots, 12$ in Relation. Es liegt also eine „Zuordnung“ der 24 Stunden des Tages zu den Ziffern $1, \ldots, 12$ vor, s. Abb. 2.6.

Diese Zuordnung nennen wir *Uhrzeit*. Die Uhrzeit hat nun – bei funktionierender Uhr – die Eigenschaft, daß zu gleichen Stunden stets dieselbe Zahl angezeigt wird. Es gilt also

$$\bigwedge_{s \in \mathcal{S}} \ \bigwedge_{t_1, t_2 \in \mathcal{Z}} \Big[\big(\langle s, t_1\rangle \in \mathcal{UZ} \ \wedge \ \langle s, t_2\rangle \in \mathcal{UZ}\big) \quad \Longrightarrow \quad t_1 = t_2\Big].$$

Relationen mit dieser Eigenschaft heißen Abbildungen.

Definition 2.9

Seien $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ Mengen, welche in diesem Kontext auch *Quellmenge* oder *Urbildbereich* bzw. *Zielmenge* oder *Bildbereich* heißen.

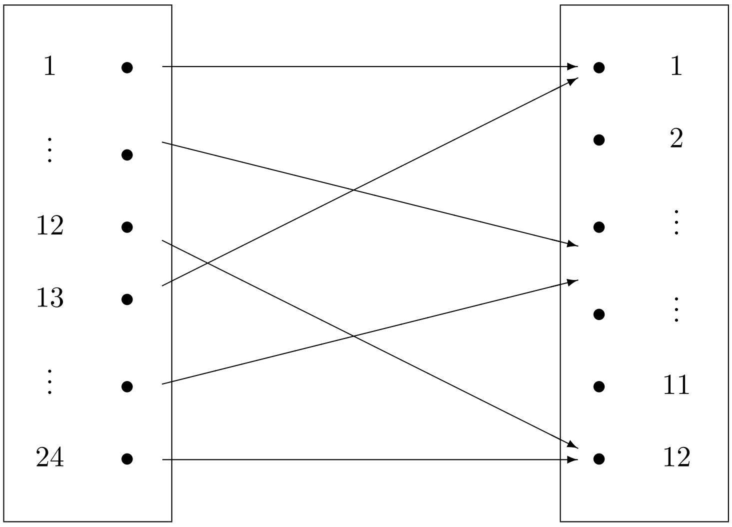

Abbildung 2.6: Zuordnung der Stunden eines Tages zu den Ziffern 1 bis 12

(i) Eine Teilmenge $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{M} \times \mathcal{N}$, also eine Relation zwischen $\mathcal{M}$ und $\mathcal{N}$, heißt *Abbildung aus* $\mathcal{M}$ *in* $\mathcal{N}$, wenn die folgende Implikation gilt:

$$\bigwedge_{x\in\mathcal{M}} \bigwedge_{y_1,y_2\in\mathcal{N}} \Big[\big(\langle x, y_1\rangle \in \mathcal{F} \ \wedge \ \langle x, y_2\rangle \in \mathcal{F} \big) \quad \Longrightarrow \quad y_1 = y_2 \Big].$$

Eine Abbildung ist somit eine rechtseindeutige Relation zwischen dem Urbild- und dem Bildbereich.

(ii) Sei $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{M} \times \mathcal{N}$ eine Abbildung. Die Mengen

$$\begin{aligned} D(\mathcal{F}) &:= \Big\{ x : \ x \in M, \ \bigvee_{y\in N} \langle x, y\rangle \in \mathcal{F} \Big\} \\ W(\mathcal{F}) &:= \Big\{ y : \ y \in N, \ \bigvee_{x\in M} \langle x, y\rangle \in \mathcal{F} \Big\} \end{aligned}$$

heißen *Definitionsbereich* bzw. *Wertebereich* der Abbildung $\mathcal{F}$.

Bezeichnungen

Sei $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{M} \times \mathcal{N}$ eine Abbildung.

(i) *Funktion* ist ein anderer Name für Abbildung.

(ii) Ist $\langle x, y\rangle \in \mathcal{F}$, so heißt x ein *Urbild* zu y (es kann mehrere geben!), und y heißt das *Bild* von x unter der Abbildung $\mathcal{F}$. Das Bild von x wird häufig abgekürzt durch $\mathcal{F}(x)$, symbolisch:

$$\langle x, y\rangle \in \mathcal{F} \quad \Longleftrightarrow \quad x \ \mathcal{F} \ y \quad \Longleftrightarrow \quad x \mapsto y = \mathcal{F}(x)$$

(iii) Sind $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{M}$ und $\mathcal{F}$ eine auf $\mathcal{D}$ definierte Abbildung, d.h. $D(\mathcal{F}) = \mathcal{D}$, so sind folgende Schreibweisen üblich:

- $$\begin{array}{rcrcl} \mathcal{F} & : & \mathcal{D} & \longrightarrow & \mathcal{N} \\ & & x & \longmapsto & \mathcal{F}(x) \end{array}$$

- $$\mathcal{F} \; : \; x \longmapsto \mathcal{F}(x) \qquad (x \in \mathcal{D})$$

- $$\mathcal{F} \; : \; y = \mathcal{F}(x) \qquad (x \in \mathcal{D})$$

Letzteres ist zu lesen: Die Abbildung $\mathcal{F}$ ordnet einem x aus $\mathcal{D}$ den Wert y bzw. $\mathcal{F}(x)$ zu, d.h. $\langle x, y\rangle \in \mathcal{F}$ bzw. $\langle x, \mathcal{F}(x)\rangle \in \mathcal{F}$.

In diesem Zusammenhang nennt man x eine *unabhängige Variable*, y eine *abhängige Variable*.

Bemerkung

Mit der formalen Definition der Rechtseindeutigkeit ist sichergestellt, daß von einem Element der Urbildmenge höchstens ein Zuordnungspfeil ausgehen darf. Man sieht das vielleicht am besten durch die Betrachtung der zur Definition logisch äquivalenten Kontraposition ein:

$$\bigwedge_{x \in \mathcal{M}} \; \bigwedge_{y_1, y_2 \in \mathcal{N}} \Big[y_1 \neq y_2 \quad \Longrightarrow \quad \big(\langle x, y_1\rangle \notin \mathcal{F} \, \vee \, \langle x, y_2\rangle \notin \mathcal{F} \big) \Big];$$

zu verschiedenen Elementen der Zielmenge kann nicht das gleiche Urbild gehören.

Im folgenden werden Abbildungen nicht mehr mit kalligraphischen Buchstaben – $\mathcal{F}$ – sondern mit normalen lateinischen Buchstaben – F – geschrieben. Das stellt ihre Definition als Menge, nämlich als Teilmenge eines kartesischen Produktes, in den Hintergrund zugunsten der Betrachtung einer Zuordnungsvorschrift und ist auch allgemein üblich.

Beispiele 2.7

(i) Beispiele für Abbildungen:

(a) Jedem Einwohner Berlins wird sein Familienname zugeordnet.

(b) Jedem PKW von Deutschland wird sein KFZ-Kennzeichen zugeordnet.

(ii) Beispiele für Nicht-Abbildungen:

(a) Jedem Patienten eines Krankenhauses wird seine Größe und sein Gewicht zugeordnet. (Relation ist nicht rechtseindeutig)

(b) Jeder quadratischen Gleichung

$$x^2 + px + q = 0 \qquad (x \in \mathbb{R}, \; p, q \in \mathbb{R} \text{ geeignet})$$

wird ihre Lösung zugeordnet. (Abbildung: ja für $p^2 = 4q$, nein sonst)

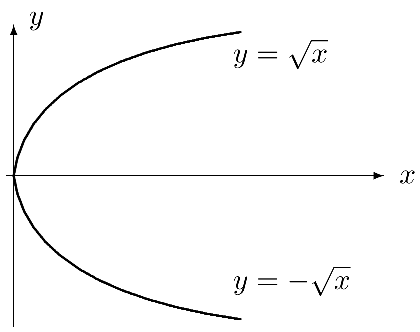

Abbildung 2.7: Darstellung der zwei (!) Funktionen $x \mapsto \pm\sqrt{x}$

(c) Die „Zuordnung“ $x \mapsto \pm \sqrt{x}$ $(x \geq 0)$ ist keine Abbildung, s. Abb. 2.7.

Definition 2.10

Seien $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ zwei Mengen und F eine Abbildung aus $\mathcal{M}$ in $\mathcal{N}$.

(i) F heißt *surjektiv* $:\Longleftrightarrow$
jedes Element aus $\mathcal{N}$ hat mindestens ein Urbild, d.h. $W(F) = \mathcal{N}$.

(ii) F heißt *injektiv* $:\Longleftrightarrow$
jedes Element aus $\mathcal{N}$ hat höchstens ein Urbild.

(iii) F heißt *bijektiv* $:\Longleftrightarrow$
jedes Element aus $\mathcal{N}$ hat genau ein Urbild.

Bemerkung

Injektive Abbildungen heißen auch *eineindeutig* oder *umkehrbar eindeutig*. Sie sind bijektiv zwischen $D(F)$ und $W(F)$ und lassen sich auf $W(F)$ umkehren.

Beispiele 2.8

In den folgenden Beispielen gelte stets $\mathcal{M} = \mathcal{N} = \mathbb{R}$.

(i) $D(F) := \mathcal{M},\ W(F) := \mathcal{N}$
$F(x) := x(x+3)(x-3) \qquad (x \in D(F))$
F ist surjektiv, aber nicht injektiv.

(ii) $D(G) := \mathcal{M},\ W(G) := \{y :\ y > 0\}$
$G(x) := \mathrm{e}^x \qquad (x \in D(G))$
F ist injektiv, aber nicht surjektiv.

(iii) $D(H) := \mathcal{M},\ W(H) := \mathcal{N}$
$H(x) := x \qquad (x \in D(H))$
H ist surjektiv und injektiv, also bijektiv.

(iv) $D(K) := \mathcal{M},\ W(K) := \{y :\ -1 \le y \le 1\}$
$K(x) := \sin x \qquad (x \in D(K))$
K ist weder surjektiv noch injektiv.

Bemerkung

Die Begriffe „surjektiv“ und „injektiv“ sind Zusatzeigenschaften, welche nicht notwendig von jeder Abbildung erfüllt sein müssen, wie man sieht. Während sich die Surjektivität oft einfach realisieren läßt – $\mathcal{N}$ auf $W(F)$ verkleinern –, ist die Injektivität eine der Abbildung inhärente Eigenschaft.

Zum Nachweis der Injektivität einer Abbildung läßt sich die Formalisierung der Aussage

Jedes Element aus $\mathcal{N}$ hat höchstens ein Urbild

verwenden:

$$\bigwedge_{x_1,x_2 \in D(F)} \left[\, x_1 \ne x_2 \quad \Longrightarrow \quad F(x_1) \ne F(x_2) \,\right]$$

bzw. die dazu äquivalente Kontraposition:

$$\bigwedge_{x_1,x_2 \in D(F)} \left[\, F(x_1) = F(x_2) \quad \Longrightarrow \quad x_1 = x_2 \,\right].$$

Beispiel 2.9

(i) $x \ \mapsto\ f(x) := 2x + 1\ (x \in \mathbb{R})$ ist injektiv:

Seien $x_1, x_2 \in D(f) = \mathbb{R}$ und gelte $f(x_1) = f(x_2)$. Dann folgt

$2x_1 + 1 = 2x_2 + 1 \quad \text{also} \quad x_1 = x_2.$

(ii) $x \ \mapsto\ g(x) := x^2\ (x \in \mathbb{R})$ ist nicht injektiv:

Für $x_1 = -1,\ x_2 = +1$ gilt:

$g(x_1) = 1 = g(x_2) \wedge x_1 \ne x_2$, also: $\displaystyle\bigvee_{x_1,x_2 \in D(g)} \left[g(x_1) = g(x_2) \wedge x_1 \ne x_2\right].$

Zum Nachweis der Surjektivität einer Abbildung gibt es leider kein Standardverfahren. Zu jedem Element y der Zielmenge $\mathcal{N}$ muß ein Urbild $x \in D(F)$ angegeben werden, für welches $y = f(x)$ gilt. *Wie* man sich dabei ein geeignetes Urbild x verschafft, hängt vom jeweiligen Fall ab.

Im folgenden Beispiel funktioniert das implizit durch die Berechnung der sog. *Umkehrabbildung*.

Beispiel 2.10

(i) $x \mapsto f(x) := 2x + 1 \ (x \in \mathbb{R})$ ist surjektiv:
Sei $y \in W(f) = \mathbb{R}$ und definiere $x := \frac{1}{2}(y-1)$. Für dieses Element x gilt dann:

$$f(x) \;=\; 2x + 1 \;=\; 2 \cdot \left[\frac{1}{2}(y-1)\right] + 1 \;=\; y.$$

Somit ist zu jedem $y \in \mathbb{R}$ ein Urbild $x \in \mathbb{R}$ gefunden, damit ist f surjektiv.

(ii) **Aufgabe**
Man zeige die Surjektivität der zweiten Funktion von Beispiel 2.9 auf einer geeigneten Zielmenge.

2.6 Äquivalenz von Mengen, Mächtigkeit einer Menge

Dieser Abschnitt beschäftigt sich mit der Größe und dem Größenvergleich von Mengen.

Beispiele 2.11

(i) In Deutschland sind weniger Autos zugelassen als in den USA: man vergleiche etwa die Zahlen der jeweiligen Zulassungsstellen.

(ii) Die Anzahl der hier versammelten Studenten ist kleiner als die Anzahl der Studenten der HTW.

(iii) $\mathbb{N}$ hat „weniger“ Elemente als $\mathbb{N}_0$ oder „viel weniger“ als $\mathbb{Z}$ oder „noch viel weniger“ als $\mathbb{R}$.

Beim Studieren der obigen Beispiele macht man die folgenden Beobachtungen:

(i) Beispiel (i) leuchtet ein, man kann die Autos jeweils abzählen.

(ii) In Beispiel (ii) hat man zwei Möglichkeiten zu argumentieren:

- Man kann die Studenten jeweils abzählen.
- Man kann die Beobachtung machen, daß sich bei der kleineren Menge um eine Teilmenge der größeren handelt.

(iii) In Beispiel (iii) kommt man damit nicht mehr so gut zu Rande: $\mathbb{N}$ und $\mathbb{N}_0$ liegen intuitiv „näher“ beieinander als $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$, ganz zu schweigen von $\mathbb{N}$ und $\mathbb{R}$.

Ohne zu zählen, ja ohne überhaupt zählen zu können, kann man feststellen, ob in einem Omnibus ebenso viele Sitzplätze wie Passagiere vorhanden sind: dies ist genau dann der Fall, wenn jeder Sitzplatz besetzt ist und kein Passagier mehr steht. Aufwendiger ausgedrückt:

> In einem Omnibus gibt es ebenso viele Sitzplätze wie Passagiere, wenn es eine bijektive Abbildung der Menge $\mathcal{S}$ aller Sitzplätze auf die Menge $\mathcal{P}$ aller Passagiere gibt.
>
> Ganz entsprechend kann man ohne zu zählen feststellen, ob es mehr bzw. weniger Sitzplätze als Passagiere gibt.

Diese Methode, *endliche* Mengen ihrer Größe nach zu vergleichen, kann auf *unendliche* Mengen übertragen werden.

Definition 2.11

Zwei Mengen heißen *äquivalent* oder *gleichmächtig*, wenn es eine bijektive Abbildung der einen Menge auf die andere gibt.

<u>Man beachte:</u>
Eine bijektive Abbildung ist umkehrbar, die Umkehrung ist wieder eine Bijektion.

Definition 2.12

(i) Eine Menge $\mathcal{M}$ heißt *endlich*, wenn eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ und eine surjektive Abbildung $f:\ \{1,\ldots,n\} \to \mathcal{M}$ existieren.

(ii) Eine Menge $\mathcal{M}$ heißt *abzählbar*, wenn eine surjektive Abbildung $f:\ \mathbb{N} \to \mathcal{M}$ existiert.

(iii) Eine Menge $\mathcal{M}$ heißt *unendlich*, wenn eine injektive Abbildung $f:\ \mathbb{N} \to \mathcal{M}$ existiert.

(iv) Eine Menge $\mathcal{M}$ heißt *abzählbar unendlich*, wenn eine bijektive Abbildung $f:\ \mathbb{N} \to \mathcal{M}$ existiert.

(v) Eine Menge $\mathcal{M}$ heißt *überabzählbar unendlich*, wenn sie nicht abzählbar ist.

Satz 2.2

(i) Endliche Mengen sind abzählbar.

(ii) $\mathbb{N}, \mathbb{N}_0, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ sind abzählbar unendlich.

Beweis

(i) Klar. Warum?

(ii) Für die Beispiele wird jeweils eine Bijektion angegeben:

- $f:\ \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}, \quad f(n) := n$

- $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}_0, \quad f(n) := n - 1$

- $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}, \quad f(n) := \begin{cases} \dfrac{n-2}{2} & , \quad \text{falls } n \text{ gerade} \\[2ex] -\dfrac{n+1}{2} & , \quad \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$

- $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q} :$ *Cauchy'sches Diagonalverfahren:*

$$
\begin{array}{ccccccc}
1/1 & \rightarrow & 2/1 & & 3/1 & \rightarrow & 4/1 \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & \\
1/2 & & 2/2 & & 3/2 & & 4/2 \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & & \\
1/3 & & 2/3 & & 3/3 & & 4/3 \\
 & \swarrow & & & & & \\
1/4 & & 2/4 & & 3/4 & & 4/4
\end{array}
$$

Auf diese Weise kann man alle positiven rationalen Zahlen abzählen. Die negativen rationalen Zahlen baut man so ein, daß man ein analoges Diagonalverfahren dafür etabliert und dann abwechselnd eine positive - und eine negative Zahl nimmt.

Man könnte nun meinen, daß man die reellen Zahlen auf ähnliche Weise abzählen kann, dieses Unterfangen erweist sich jedoch als undurchführbar, wie durch einen Widerspruchsbeweis sofort klar wird. Diese Nicht-Abzählbarkeit der reellen Zahlen oder analog, die Nicht-Abzählbarkeit von Folgen natürlicher Zahlen ist es, was die reellen Zahlen fundamental von den rationalen Zahlen unterscheidet und letztendlich die Differential- und Integralrechnung ermöglicht.

Satz 2.3

Die Menge $\mathcal{I} := \{x : \ 0 \leq x \leq 1\} = [0,1]$ ist nicht mehr abzählbar, also überabzählbar.

Beweis (Cantor'sches Diagonalverfahren)

Jede Zahl aus dem Intervall $[0,1]$ läßt sich als unendlicher Dezimalbruch der Form

$$0, x_1, x_2, x_3, x_4, \ \ldots$$

schreiben. Wäre $[0,1]$ nun abzählbar, so könnte man diese Dezimalbrüche anordnen:

$$
\begin{array}{r|cccccc}
1. & 0\,, & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots \\
2. & 0\,, & a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \cdots \\
3. & 0\,, & a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots
\end{array}
$$

Jetzt wird der im Intervall $[0,1]$ liegende Dezimalbruch b definiert durch

$$b_n := \begin{cases} 1 \quad , & \text{falls } \ a_{nn} = 0 \\ 0 \quad , & \text{sonst} \end{cases} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

Dann kommt der Dezimalbruch $0, b_1, b_2, b_3, b_4, \ldots$ in der obigen Aufzählung aber nicht vor, denn er unterscheidet sich von jedem anderen mindestens an der n-ten Stelle nach dem Komma; er kann also nicht mit „abgezählt“ worden sein. Damit sind das Intervall $[0,1]$ und erst recht die Menge $\mathbb{R}$ nicht abzählbar.

2.7 Beweisverfahren der vollständigen Induktion

Für abzählbare Mengen, also insbesondere für $\mathbb{N}$ selbst, gilt das *Beweisverfahren der vollständigen Induktion.*

Satz 2.4 (Axiom oder Prinzip der vollständigen Induktion)

Seien $n_0 \in \mathbb{Z}$ und $A(n)$ eine Aussageform. $A(n)$ wird also bei Belegung mit einer zulässigen Prädikatvariablen (hier: mit einer ganzen Zahl) zu einer Aussage. Dann gilt:

$$\Big(A(n_0) \ \wedge \bigwedge_{n \geq n_0} \big[A(n) \Rightarrow A(n+1) \big] \Big) \quad \Longrightarrow \quad \bigwedge_{n \geq n_0} A(n).$$

<u>In Worten:</u>

Die Aussage $A(n_0)$ sei wahr für eine Zahl $n_0 \in \mathbb{Z}$. Wenn dann für jede Zahl $n \geq n_0$ aus der Voraussetzung, daß $A(n)$ wahr ist, auch die Gültigkeit der Aussage $A(n+1)$ folgt, also die Gültigkeit für den Nachfolger, so gilt:

$$A(n) \text{ ist wahr für jede Zahl } n \geq n_0.$$

Die Anwendung dieses Beweisverfahrens soll an zwei Beispielen demonstriert werden. Die Idee ist dabei jedesmal die folgende:

1. *Induktionsverankerung:*
   Man zeige die Gültigkeit der Behauptung für *eine* Zahl n_0.

2. *Induktionsvoraussetzung:*
   Man nehme an, sie gelte für (irgend-) eine Zahl $n \geq n_0$.

3. *Induktionsschluß:*
   Mit Hilfe der Induktionsvoraussetzung (2.) zeige man dann, daß die Behauptung auch für den Nachfolger von n gilt, daß also $A(n+1)$ gilt.

Satz 2.5

Sei $\mathcal{M}$ eine endliche Menge und bezeichne $|\mathcal{M}|$ die Anzahl ihrer Elemente, die sog. *Mächtigkeit* der Menge $\mathcal{M}$. Dann gilt für die Anzahl der Elemente der Potenzmenge die Formel

$$|\mathcal{P}(\mathcal{M})| \;=\; 2^{|\mathcal{M}|}.$$

Beweis

Sei

$$A(n): \iff \big(\,|\mathcal{M}| = n \;\Rightarrow\; |\mathcal{P}(\mathcal{M})| = 2^n\,\big) \qquad (n \in \mathbb{N}_0).$$

1. Induktionsverankerung:
   Sei $\mathcal{M}$ eine Menge mit $|\mathcal{M}| = 0$. Dann enthält $\mathcal{M}$ kein Element, also ist $\mathcal{M} = \emptyset$. Dann hat $\mathcal{M}$ nur sich selbst zur Teilmenge, also gilt

   $$\mathcal{M} = \emptyset\ ,\ |\mathcal{M}| = 0\ ,\ \mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}\ , \qquad \text{also} \qquad |\mathcal{P}(\emptyset)| = 1 = 2^0.$$

   Damit gilt $A(0)$.

2. Induktionsvoraussetzung:
   Seien $n \geq 0$ und $\mathcal{M}$ eine Menge mit n Elementen, es gelte also

   $$A(n) \quad \iff \quad \big(\,|\mathcal{M}| = n \;\Rightarrow\; |\mathcal{P}(\mathcal{M})| = 2^n\,\big).$$

3. Induktionsschluß:
   Sei $\mathcal{M}$ eine Menge mit $n+1$ Elementen, etwa: $\mathcal{M} := \{a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}\}$. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es genau 2^n Teilmengen, die nur aus den Elementen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ bestehen. Zu jeder dieser Teilmengen kann man das Element a_{n+1} hinzufügen. Das ergibt dann noch einmal 2^n Teilmengen, insgesamt also $2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$ Teilmengen. Damit gilt

   $$A(n+1) \quad \iff \quad \big(\,|\mathcal{M}| = n+1 \;\Rightarrow\; |\mathcal{P}(\mathcal{M})| = 2^{n+1}\,\big).$$

Nach Satz 2.4 gilt damit die Aussage $A(n)$ für alle Zahlen $n \in \mathbb{N}_0$:

$$\bigwedge_{n \in \mathbb{N}_0} A(n)\ , \quad \text{also} \qquad \bigwedge_{n \in \mathbb{N}_0} \big(\,|\mathcal{M}| = n \;\Rightarrow\; |\mathcal{P}(\mathcal{M})| = 2^n\,\big).$$

„Satz“ 2.6

Alle Babies haben dieselbe Augenfarbe.

Beweis (mit vollständiger Induktion)

Sei

$$B(n): \iff \text{n Babies haben dieselbe Augenfarbe.} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

1. Induktionsverankerung:
   Sei $\mathcal{M}$ eine Menge mit einem Baby. Dann hat dieses Baby nur eine Augenfarbe, d.h. es gilt $B(1)$.

2. Induktionsvoraussetzung:
   Seien $n \geq 1$ und $\mathcal{M}$ eine Menge mit n Babies, welche alle dieselbe Augenfarbe haben, es gelte also $B(n)$.

3. Induktionsschluß:
   Sei $\mathcal{M}$ eine Menge mit $n+1$ Babies, etwa: $\mathcal{M} := \{b_1, b_2, \ldots, b_n, b_{n+1}\}$. Man betrachte die beiden Mengen

   $$\mathcal{B}_1 := \{b_1, b_2, \ldots, b_n\} \qquad \text{und} \qquad \mathcal{B}_2 := \{b_2, b_3, \ldots, b_{n+1}\}.$$

   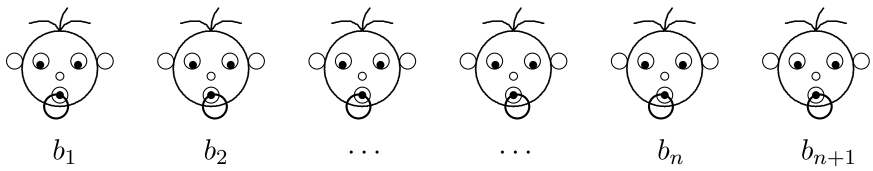

   Abbildung 2.8: $n+1$ Babies

   Nach Induktionsvoraussetzung haben alle Babies der Menge $\mathcal{B}_1$ und alle Babies der Menge $\mathcal{B}_2$ dieselbe Augenfarbe. Die Babies $b_2, b_3, \ldots, b_n$ gehören zu beiden Mengen, daher sind die Augenfarben der beiden Mengen gleich, folglich haben alle $n+1$ Babies dieselbe Augenfarbe.

Richtig?

Stichwortverzeichnis