Übungsklausur

1. *Kombinatorik.* Aus einem Skatspiel (8 verschiedene Karten, alle mehrfach vorhanden) werden drei Karten gezogen und nebeneinander aufgedeckt. Wieviel verschiedene Muster können dabei entstehen?

2. *Wahrscheinlichkeitsrechnung.* Beim dreimaligen Wurf einer homogenen Münze sind folgende acht gleichwahrscheinlichen Elementarereignisse möglich (K=Kopf, Z=Zahl): KKK, KKZ, KZK, KZZ, ZKK, ZKZ, ZZK, ZZZ. Drei Zufallsvariablen X, Y und Z seien wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} X &= \text{„Anzahl der Z beim ersten Wurf“} \\ Y &= \text{„Anzahl der Z bei allen drei Würfen“} \\ Z &= X \cdot Y \end{aligned}$$

   a) Geben Sie die möglichen Werte x_i für X, y_j für Y und z_k für Z an.
   b) Bestimmen Sie für alle Werte von X und Y die Wahrscheinlichkeiten $p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j)$, die Randwahrscheinlichkeiten $p_{i\cdot} = P(X = x_i)$, $p_{\cdot j} = P(Y = y_i)$, und stellen Sie eine Verteilungstabelle auf.
   c) Bestimmen Sie für alle Werte von Z die Wahrscheinlichkeiten $p_k = P(Z = z_k)$.
   d) Berechnen Sie die Erwartungswerte $\mu_X = E(X)$, $\mu_Y = E(Y)$, $\mu_Z = E(Z)$ und die Varianzen $\sigma_X^2 = D^2(X)$, $\sigma_Y^2 = D^2(Y)$, $\sigma_Z^2 = D^2(Z)$.
   e) Berechnen Sie die Kovarianz $\sigma_{XY} = b(X, Y)$ und den Korrelationskoeffizienten $\rho(X, Y)$.

3. *Wahrscheinlichkeitsrechnung.* Die Ergebnisse einer Längenmessung seien normalverteilt mit den Parametern $\mu = 10\,\text{cm}$ und $\sigma = 1\,\text{cm}$. Geben Sie die Wahrscheinlichkeiten dafür an, daß ein Meßwert

   a) genau 10 cm beträgt,
   b) im Bereich [9 cm, 12 cm] liegt,
   c) kleiner als 5 cm bzw.
   d) größer als 20 cm aufällt.

   Bestimmen Sie außerdem den Meßwert $l < 10\,\text{cm}$, der mit einer Wahrscheinlichkeit von 1% unterschritten wird.

4. *Lineare Regression.* Bei einer experimentellen Untersuchung des freien Falls wurde zu verschiedenen Zeitpunkten t die vertikale Geschwindigkeit v eines Körpers gemessen. Die Messung lieferte vier Punkte der Form (t, v) mit den Werten (0 s, 21 m/s), (1 s, 8 m/s), (2 s, 1 m/s) und (3 s, −10 m/s).

   a) Geben Sie die Gleichung jener linearen Funktion an, die im quadratischen Mittel am besten zu den Meßwerten paßt (Gleichung der Regressionsgeraden).
   b) Skizzieren Sie die Meßpunkte und die Regressionsgerade in einem v-t-Diagramm.
   c) Berechnen Sie die arithmetischen Mittelwerte $\bar{t}$, $\bar{v}$, die empirischen Standardabweichungen s_t, s_v und die empirische Restvarianz s_{Rest}^2.