Serie 04

1. *Determinanten*. Berechnen Sie mittels Methode Ihrer Wahl

$$\begin{vmatrix} 3/2 & -3/2 & -3/2 & -3 \\ 5/3 & -8/3 & -2/3 & -7/3 \\ 4/3 & -5/3 & -1 & -2/3 \\ 7 & -8 & -4 & -5 \end{vmatrix} \tag{1}$$

und

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -6 & 4 \\ -3 & 1 & 2 & -5 \\ 4 & 0 & -4 & 3 \\ 6 & 0 & 1 & 8 \end{vmatrix}. \tag{2}$$

Lösungen: 5, 35

2. *Lineare Gleichungssysteme*. Man löse nach der Cramerschen Regel und

$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 3 \\ -x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & = & -1 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 14 \end{array}. \tag{3}$$

Lösung: $x_1 = -1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 4$

3. *Lineare Gleichungssysteme*. Prüfen Sie, ob das folgende System lösbar ist, und berechnen Sie die allgemeine Lösung.

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} 3x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & 2x_4 & + & x_5 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & - & x_4 & - & x_5 & = & -1 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & - & x_5 & = & 2 \\ 4x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & - & 2x_4 & + & x_5 & = & -2 \end{array}. \tag{4}$$

Lösung: $x_3 = (x_5 + x_4 + 5)/3$, $x_2 = (8x_5 - x_4 - 5)/6$, $x_1 = (-4x_5 + 5x_4 + 7)/6$

4. *Analytische Geometrie*. Bezüglich einer orthonormalen Basis $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ des E_3 (Rechtssystem) seien drei Vektoren wie folgt gegeben:

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} -2/3 \\ \sqrt{32}/3 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Berechnen Sie $|\mathbf{a}|$, $|\mathbf{b}|$, $\angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, $\mathbf{ab}$, $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ sowie die Richtungskosinus' von $\mathbf{a}$!

Lösungen: $|\mathbf{a}| = 2\sqrt{2}$, $|\mathbf{b}| = 2\sqrt{13}$, $\angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \approx 2.2 \approx 126.04°$, $\mathbf{ab} = -12$,
$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (16/3\sqrt{2} \quad -28/3 \quad -8\sqrt{2})^{\mathrm{T}}$, $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = -4(7 + 2\sqrt{2})/3 \approx -13.1$,
$\cos(\mathbf{a}, \mathbf{e}_1) = -1/(3\sqrt{2})$, $\cos(\mathbf{a}, \mathbf{e}_2) = 2/3$, $\cos(\mathbf{a}, \mathbf{e}_3) = -1/\sqrt{2}$

5. *Lineare Räume*. Sind die folgenden Vektoren linear abhängig?

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \tag{6}$$

Lösung: Schon.