Serie 05

1. *Lineare Gleichungssysteme*. Ermitteln Sie die Koeffizienten a_i des Polynoms

$$P(z) \;=\; a_4z^4 + a_3z^3 + a_2z^2 + a_1z + a_0 \tag{1}$$

derart, daß $P(-2) = 3$, $P(-1) = 1$, $P(0) = 1$, $P(1) = -3$ und $P(2) = -1$ gilt! Ist die Lösung eindeutig bestimmt?

2. *Lineare Räume*. Untersuchen Sie, ob die Vektoren

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

linear abhängig sind, indem Sie alle Kriterien (d.h. alle neun vorgestellten Sätze über lineare Abhängigkeit) auf Erfülltsein prüfen!

3. *Lineare Räume*. Zeigen Sie, daß die Vektoren

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \tag{3}$$

linear unabhängig sind, und stellen Sie den Vektor

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} \tag{4}$$

als Linearkombination von $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ dar! Wäre eine derartige Darstellung auch bei linearer Abhängigkeit von $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ möglich?

Lösung: $\mathbf{b} = \frac{1}{2}\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + 2\mathbf{a}_3$

4. *Lineare Räume*. Sei M_{22} die Menge der quadratischen zweireihigen Matrizen, deren Elemente reelle Zahlen sind. In M_{22} sei eine Addition und eine Multiplikation mit reellen Zahlen wie folgt definiert:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix}, \tag{5}$$

$$\lambda \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} \end{pmatrix}. \tag{6}$$

   a) Zeigen Sie, daß M_{22} ein Vektorraum über dem Körper der reellen Zahlen ist. Geben Sie den Nullvektor an.
   b) Bestimmen Sie die Dimension von M_{22}.
   c) Geben Sie eine Basis B von M_{22} an.
   d) Bestimmen Sie die Koordinaten des Vektors $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ bezüglich Ihrer Basis B.