Serie 08

1. *Komplexe Zahlen*. Seien z_1, z_2 komplexe Zahlen und z_1^*, z_2^* die zugehörigen konjugiert komplexen Zahlen. Beweisen Sie die Identitäten

$$(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^*, \tag{1}$$
$$(z_1 z_2)^* = z_1^* z_2^*, \tag{2}$$

   und zeigen Sie, daß $z_1 + z_1^*$ und $z_1 z_1^*$ stets reell sind.

2. *Entwicklungssatz der Vektoralgebra*. Zeigen Sie mittels Koordinatendarstellung, daß für beliebige Vektoren des Raumes $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in E_3$ gilt

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}). \tag{3}$$

3. *Matrizen*. Zeigen Sie unter Verwendung der Additionstheoreme, daß

$$\begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} \cos 2x & -\sin 2x \\ \sin 2x & \cos 2x \end{pmatrix}. \tag{4}$$

4. *Analytische Geometrie*. Es sei g diejenige Gerade, welche durch die Punkte $P_0 = (1, 1, 0)$ und $P_1 = (0, 1, 1)$ verläuft. Berechnen Sie den Abstand zwischen $P_2 = (1, 0, 1)$ und g, die HESSEsche Normalform der durch g und P_2 definierten Ebene E, sowie den Abstand des Ursprunges $O = (0, 0, 0)$ von E!

   Lösungen: $\sqrt{3/2}$, $(x + y + z - 2)/\sqrt{3} = 0$, $2/\sqrt{3}$

5. *Analytische Geometrie*. Bestimmen Sie den Durchstoßpunkt der Geraden

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{5}$$

   durch die Ebene

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

   Lösung: $(-1, 4, 3)$

6. *Polynome*. Sei

$$P(z) = z^5 + 2z^4 - 3z^3 + 4z^2 - 5z + 6. \tag{7}$$

   Bestimmen Sie mit Hilfe des HORNERschen Schemas $P(2)$ und mittels Polynomdivision ein $Q(z)$ derart, daß gilt

$$P(z) = P(2) + (z - 2)Q(z). \tag{8}$$