

## Serie 09

1. *Analytische Geometrie.* Gegeben seien zwei Ebenen  $E_1$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

und  $E_2$

$$x + 2y + 2z + 3 = 0. \quad (2)$$

Zeigen Sie, daß die Ebenen nicht parallel zueinander sind, und geben Sie die Schnittgerade in Parameterform an!

2. *Polynome.* Bestimmen Sie die Koeffizienten eines Polynoms dritten Grades  $P(z)$  mit den Nullstellen  $-1, -2, -3$  und  $P(2) = 10$ . Gibt es mehrere derartige Polynome?
3. *Polynome.* Berechnen Sie alle Nullstellen von

$$P(z) = 2z^7 - 4z^6 + 2z^5 - 2z^4 + 4z^3 - 2z^2 \quad (3)$$

und stellen Sie  $P(z)$  in reeller und komplexer Produktform dar!

4. *Rationale Funktionen.* Bestimmen Sie eine ganzrationale Funktion  $P$  und eine echt gebrochenrationale Funktion  $R$  derart, daß gilt

$$P(z) + R(z) = \frac{3z^2 + 2z + 1}{2z^2 - z + 1}. \quad (4)$$

Sind  $P$  und  $R$  eindeutig bestimmt?

5. *Rationale Funktionen.* Zerlegen Sie die echt gebrochenrationalen Funktionen

$$R_1(x) = \frac{2}{1 - x^2}, \quad (5)$$

$$R_2(x) = \frac{x}{x^2 + 2x + 1} \quad (6)$$

in Partialbrüche!

Hinweis zur Zerlegung: Bestimmen Sie alle Nullstellen (nebst Vielfachheiten) des Nennerpolynoms, finden Sie den passenden Ansatz für die Zerlegung, und berechnen Sie die Koeffizienten aus dem Ansatz mittels Koeffizientenvergleich oder durch Einsetzen spezieller Werte.

6. *Ungleichungen.* Es sei  $\epsilon$  eine gegebene positive reelle Zahl. Welche natürlichen Zahlen  $n$  erfüllen die Ungleichung

$$\left| \frac{4}{n^2} \right| < \epsilon ? \quad (7)$$

# Lösungen

1.

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 25 \\ -15 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 18 \\ -8 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (8)$$

2.

$$P(z) = \frac{1}{6}z^3 + z^2 + \frac{11}{6}z + 1 \quad (9)$$

Das Polynom ist eindeutig bestimmt.

3.

$$P(z) = 2z^2(z-1)^3(z^2+z+1) \quad (10)$$

$$= 2z^2(z-1)^3\left(z + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}j\right)\left(z + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}j\right) \quad (11)$$

4.

$$P = \frac{3}{2} \quad (12)$$

$$R = \frac{7z-1}{4z^2-2z+2} \quad (13)$$

$P$  und  $R$  sind eindeutig bestimmt.

5.

$$R_1(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} \quad (14)$$

$$R_2(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} \quad (15)$$

6.

$$n > \frac{2}{\sqrt{\epsilon}} \quad (16)$$

(beispielsweise  $n > 2$  für  $\epsilon = 1$ ,  $n > 20$  für  $\epsilon = 0.01$  und  $n > 200$  für  $\epsilon = 0.0001$ .)