Die Lösung der Gleichung

$$y \;=\; \sqrt{x+a} \;+\; \sqrt{x+b}$$

Steffen Solyga
Technische Universität Berlin*

6. Dezember 1994

Die Auflösung der Gleichung

$$y \;=\; \sqrt{x+a} \;+\; \sqrt{x+b} \tag{1}$$

nach x bei gegeben Werten a, b und y scheint auf den ersten Blick etwas schwierig zu sein, ist jedoch ohne größere Probleme möglich.
Die wichtigste Lösung sei schon vorab verraten: Sind a, b und y reelle Zahlen, so existiert entweder genau eine oder keine Lösung x der Gleichung (1). Die Lösung existiert genau dann, wenn a, b und y der Ungleichung

$$y \;\geq\; \sqrt{|a-b|} \tag{2}$$

genügen, ist stets reell und lautet

$$x \;=\; \frac{1}{4}\left(y+\frac{a-b}{y}\right)^2 - a \tag{3}$$

$$x \;=\; \frac{1}{4}\left(y+\frac{b-a}{y}\right)^2 - b. \tag{4}$$

Die Gleichungen (3) und (4) sind Identitäten. Aufgrund der Symmetrie von (1) bezüglich a und b kann man die Gültigkeit der einen Gleichung sofort aus der Gültigkeit der anderen schlußfolgern.
Ich werde nun Lösbarkeit und Lösung genauer untersuchen.

*Institut für Theoretische Elektrotechnik, EN-2, Einsteinufer 17, 10587 Berlin

1 Der reelle Fall

Gegeben seien reelle Zahlen a, b und y. Gesucht ist die Menge der der Gleichung (1) genügenden reellen Zahlen x.
Ich betrachte die Menge M der geordneten Quadrupel $Q = (a, b, x, y)$ reeller Zahlen a, b, x und y. Von Interesse ist nun die Lösungsmenge L von (1), welche als Untermenge von M gemäß

$$L \quad = \quad \{Q \mid Q \in M \;\wedge\; Q \text{ genügt } (1)\} \tag{5}$$

definiert werden kann. Weil im folgenden stets auf die Elemente Q von M Bezug genommen wird, definiere ich zur Abkürzung noch die Aussage (*) durch

$$(*) \quad \Longleftrightarrow \quad Q \in M \;\wedge\; Q \text{ genügt } (*), \tag{6}$$

weshalb (5) einfach durch

$$L \quad = \quad \{Q \mid (1)\} \qquad \text{bzw.} \qquad Q \in L \quad \Leftrightarrow \quad (1)$$

ersetzt werden kann. Aus einem später ersichtlich werdenden Grunde seien außerdem die beiden Mengen

$$L_0 \quad = \quad \{Q \mid (1) \;\wedge\; y = 0\} \tag{7}$$

$$L_1 \quad = \quad \{Q \mid (1) \;\wedge\; y \neq 0\} \tag{8}$$

betrachtet, welche offenbar den folgenden Beziehungen genügen

$$L_0 \cup L_1 \quad = \quad L \tag{9}$$

$$L_0 \cap L_1 \quad = \quad \emptyset. \tag{10}$$

Bei der Auflösung von (1) nach x werde ich nicht-äquivalente Umformungen vornehmen, weshalb auch die Lösungsmengen der abgeleiteten Gleichungen nicht mit der von (1) äquivalent sind. Das Erfüllen einer abgeleiteten Gleichung ist lediglich notwendig, i.allg. jedoch nicht hinreichend für das Erfüllen von (1). Durch konjunktive Verknüpfung mehrerer notwendiger Bedingungen werde ich eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Erfüllung von (1) aufstellen, in welcher auch die Erfüllung der nach x aufgelösten Gleichung (1) enthalten ist. Dabei werde ich ständig von der Beziehung

$$(A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow C) \quad \Longrightarrow \quad (A \Rightarrow B \wedge C) \tag{11}$$

Gebrauch machen, welche natürlich auch für $C = A$ gültig ist.

1.1 Die Menge L_0

Der Definition (7) von L_0 entnimmt man sofort $Q \in L_0 \;\Rightarrow\; y = 0$, weshalb eine erste für $Q \in L_0$ notwendige Bedingung durch

$$B_1 \;:\; y = 0$$

gegeben ist.[1] Ebenfalls (7) entnimmt man

$$B_2 \;:\; 0 = \sqrt{x+a} \;+\; \sqrt{x+b}.$$

Aus B_2 läßt sich nun schließen, daß Q dann auch den Gleichungen

$$\begin{aligned}
-\sqrt{x+a} &= \sqrt{x+b} \\
-\sqrt{x+a}\,\sqrt{x+b} &= \sqrt{x+b}\,\sqrt{x+b} \\
(-\sqrt{x+a})^2 &= (\sqrt{x+b})^2 \\
x+a &= x+b \\
a &= b
\end{aligned}$$

genügt, womit wegen

$$(A \Rightarrow B \Rightarrow C) \;\Longrightarrow\; (A \Rightarrow C) \tag{12}$$

eine dritte für $Q \in L_0$ notwendige Bedingung durch

$$B_3 \;:\; a = b$$

gegeben ist. - Offenbar ist $B_1 \wedge B_3$ noch nicht hinreichend für $Q \in L_0$, weshalb noch eine weitere notwendige Bedingung zu suchen ist. - Notwendig für $B_2 \wedge B_3$ ist, daß Q den Gleichungen

$$\begin{aligned}
0 &= 2\sqrt{x+a} \\
0 &= \sqrt{x+a} \\
0 &= x+a \\
x &= -a
\end{aligned}$$

genügt, weshalb gemäß (11) die Bedingung

$$B_4 \;:\; x = -a$$

auch für $Q \in L_0$ notwendig ist. Nun ist - ebenfalls wegen (11) - $B_1 \wedge B_3 \wedge B_4$ notwendig aber offenbar auch hinreichend für $Q \in L_0$, weshalb L_0 in meinem Sinne - nämlich im Sinne einer Auflösung von Gleichung (1) nach x - bestimmt ist:

$$Q \in L_0 \;\Longleftrightarrow\; y = 0 \;\wedge\; a = b \;\wedge\; x = -a. \tag{13}$$

[1] Ich erinnere an die Festsetzung (6), wonach B_1 also bedeutet:
„Das geordnete reelle Quadrupel (a, b, x, y) genügt der Gleichung $y = 0$.“.

1.2 Die Menge L_1

Analog zu Abschnitt 1.1 habe ich gemäß (8) folgende für $Q \in L_1$ notwendige Bedingungen

$$\begin{aligned} B_1 &: \ y \neq 0, \\ B_2 &: \ y = \sqrt{x+a} \ + \ \sqrt{x+b}, \\ B_3 &: \ y > 0, \end{aligned}$$

wobei B_3 aus B_1 und B_2 folgt. Notwendig für $B_1 \wedge B_2$ ist weiterhin, daß Q den folgenden Gleichungen genügt:

$$\begin{aligned} y^2 &= x + a + 2\sqrt{(x+a)(x+b)} + x + b \\ 0 &= (y^2 - 2x - a - b)^2 - 4(x+a)(x+b) \\ 0 &= 4x^2 + 4x(a+b-y^2) + y^4 + a^2 + b^2 - 2y^2(a+b) + 2ab - 4x^2 - 4x(a+b) - 4ab \\ 4y^2x &= y^2[y^2 - 2(a+b)] + (a-b)^2 \\ x &= \frac{1}{4}\Big[y^2 - 2(a+b) + \Big(\frac{a-b}{y}\Big)^2\Big] \\ x &= \frac{1}{4}\Big[\Big(y - \frac{a-b}{y}\Big)^2 - 4b\Big] \\ x &= \frac{1}{4}\left(y + \frac{b-a}{y}\right)^2 - b \qquad (14) \\ x &= \frac{1}{4}\left(y + \frac{a-b}{y}\right)^2 - a, \qquad (15) \end{aligned}$$

wobei (14) und (15) Identitäten sind. Als vierte für $Q \in L_1$ notwendige Bedingung habe ich also

$$B_4 \ : \ x = \frac{1}{4}\left(y + \frac{a-b}{y}\right)^2 - a.$$

Obwohl das Quadrupel $(25, 16, 0, 1)$ der Bedingung $B_3 \wedge B_4$ genügt, gehört es der Menge L_1 nicht an, denn es genügt nicht der Bedingung B_2. Es bedarf also noch einer weiteren notwendigen Bedingung für $Q \in L_1$, um eine hinreichende zu erhalten.[2] In Anbetracht der Relation (11) suche ich nach einer für $B_2 \wedge B_3 \wedge B_4$ notwendigen Bedingung, was man für gewöhnlich „Einsetzen“ nennt, und erhalte

$$B_5 \ : \ y = \frac{1}{2}\Big|\underbrace{y + \frac{a-b}{y}}_{T_1}\Big| + \frac{1}{2}\Big|\underbrace{y + \frac{b-a}{y}}_{T_2}\Big| \qquad \wedge \qquad B_3. \qquad (16)$$

[2] Selbstverständlich ist $B_2 \wedge B_3 \wedge B_4$ hinreichend für $Q \in L_1$, weil bereits $B_2 \wedge B_3$ hinreicht, nur ist dies keine Bedingung im Sinne einer Auflösung von (1) nach x.

Zur Auflösung der Beträge gehe ich aus von der Beziehung

$$\begin{array}{ll} T_1 \geq 0 \wedge T_2 \geq 0 \ \vee \ T_1 \geq 0 \wedge T_2 \leq 0 \ \vee & \\ T_1 \leq 0 \wedge T_2 \geq 0 \ \vee \ T_1 \leq 0 \wedge T_2 \leq 0 & \iff \text{„wahr“}, \end{array}$$

welche offenbar für jedes Paar reeller Zahlen T_1, T_2 richtig ist. Die konjunktive Verknüpfung mit B_5 liefert

$$\begin{aligned} B_5 \iff & \underbrace{[T_1 \geq 0 \ \wedge \ T_2 \geq 0 \ \wedge \ B_5]}_{C_1} \vee \underbrace{[T_1 \geq 0 \ \wedge \ T_2 \leq 0 \ \wedge \ B_5]}_{C_2} \vee \\ & \underbrace{[T_1 \leq 0 \ \wedge \ T_2 \geq 0 \ \wedge \ B_5]}_{C_3} \vee \underbrace{[T_1 \leq 0 \ \wedge \ T_2 \leq 0 \ \wedge \ B_5]}_{C_4}. \end{aligned}$$

Die rechsseitige Disjunktion läßt sich ganz wesentlich vereinfachen. Zu diesem Zwecke betrachte ich die C_i im einzelnen.

Der Fall C_1.
Im Falle C_1 sind die T_i nichtnegativ, so daß in (16) $|T_i|$ durch T_i ersetzt werden kann.

$$\begin{aligned} C_1 \iff & T_1 \geq 0 \ \wedge \ T_2 \geq 0 \ \wedge \ B_5 \\ \iff & y + (a-b)/y \geq 0 \ \wedge \ y + (b-a)/y \geq 0 \ \wedge \ y = y \ \wedge \ y > 0 \\ \iff & y^2 \geq b - a \ \wedge \ y^2 \geq a - b \ \wedge \ y > 0 \\ \iff & y^2 \geq |a-b| \ \wedge \ y > 0 \\ \iff & y \geq \sqrt{|a-b|} \ \wedge \ y > 0 \end{aligned}$$

Der Fall C_2.
Es ist nun $|T_1| = T_1$ und $|T_2| = -T_2$.

$$\begin{aligned} C_2 \iff & T_1 \geq 0 \ \wedge \ T_2 \leq 0 \ \wedge \ B_5 \\ \iff & y + (a-b)/y \geq 0 \ \wedge \ y + (b-a)/y \leq 0 \ \wedge \ y = (a-b)/y \ \wedge \ y > 0 \\ \iff & y^2 \geq b - a \ \wedge \ y^2 \leq a - b \ \wedge \ y^2 = a - b \ \wedge \ y > 0 \\ \iff & y = \sqrt{a-b} \ \wedge \ y > 0 \end{aligned}$$

Man beachte die Redundanz von $y^2 \geq b - a$ wegen $b - a \leq 0$.

Der Fall C_3.
Es ist nun $|T_1| = -T_1$ und $|T_2| = T_2$.

$$\begin{aligned} C_3 \iff & T_1 \leq 0 \ \wedge \ T_2 \geq 0 \ \wedge \ B_5 \\ \iff & y + (a-b)/y \leq 0 \ \wedge \ y + (b-a)/y \geq 0 \ \wedge \ y = (b-a)/y \ \wedge \ y > 0 \\ \iff & y^2 \leq b - a \ \wedge \ y^2 \geq a - b \ \wedge \ y^2 = b - a \ \wedge \ y > 0 \\ \iff & y = \sqrt{b-a} \ \wedge \ y > 0 \end{aligned}$$

In diesem Falle ist $y^2 \geq a - b$ redundant.

Der Fall C_4.
Es ist $|T_1| = -T_1$ und $|T_2| = -T_2$.

$$\begin{aligned} C_4 &\iff T_1 \le 0 \;\wedge\; T_2 \le 0 \;\wedge\; B_5 \\ &\iff \ldots \;\wedge\; y = -y \;\wedge\; y > 0 \\ &\iff \text{„falsch“} \end{aligned}$$

Zusammenfassend gilt folglich

$$\begin{aligned} B_5 &\iff C_1 \;\vee\; C_2 \;\vee\; C_3 \;\vee\; C_4 \\ &\iff \Big(y \ge \sqrt{|a-b|} \;\vee\; y = \sqrt{a-b} \;\vee\; y = \sqrt{b-a}\,\Big) \;\wedge\; y > 0 \\ &\iff \Big(y \ge \sqrt{|a-b|} \;\vee\; y = \sqrt{|a-b|}\,\Big) \;\wedge\; y > 0 \\ &\iff y \ge \sqrt{|a-b|} \;\wedge\; y > 0, \end{aligned}$$

weshalb ich als sechste für $Q \in L_1$ notwendige Bedingung schreibe

$$B_6 \;:\; y \ge \sqrt{|a-b|} \;\wedge\; y > 0.$$

Unter erneuter Verwendung der Beziehung (11) postuliere ich also

$$Q \in L_1 \implies B_4 \;\wedge\; B_6. \tag{17}$$

Offenbar ist nun auch die Umkehrung dieser Aussage richtig, denn es gilt

$$\begin{aligned} B_6 &\implies y^2 \ge |a-b| \ge b-a \;\wedge\; y > 0 \\ &\implies y \ge (b-a)/y \\ &\implies y + (a-b)/y \ge 0, \qquad \text{und analog} \\ B_6 &\implies y + (b-a)/y \ge 0, \end{aligned}$$

weshalb einerseits mit B_4

$$\begin{aligned} \sqrt{x+a} + \sqrt{x+b} &= \frac{1}{2}\Big|y + \frac{a-b}{y}\Big| + \frac{1}{2}\Big|y + \frac{b-a}{y}\Big| \\ &= \frac{1}{2}\Big(y + \frac{a-b}{y} + y + \frac{b-a}{y}\Big) \\ &= y, \end{aligned}$$

und andererseits direkt aus B_6 $y \ne 0$ folgt. Mithin gilt

$$B_4 \;\wedge\; B_6 \implies (1) \;\wedge\; y \ne 0,$$

was in Anbetracht der Definition (8) der Menge L_1 auch als

$$B_4 \;\wedge\; B_6 \implies Q \in L_1 \tag{18}$$

geschrieben werden kann. Damit ist aber L_1 in meinem Sinne eindeutig bestimmt, denn wegen (17) und (18) gilt

$$Q \in L_1 \iff y > 0 \ \wedge \ y \geq \sqrt{|a-b|} \ \wedge \ x = \frac{1}{4}\left(y + \frac{a-b}{y}\right)^2 - a,$$

$$Q \in L_1 \iff y \neq 0 \ \wedge \ y \geq \sqrt{|a-b|} \ \wedge \ x = \frac{1}{4}\left(y + \frac{a-b}{y}\right)^2 - a. \tag{19}$$

1.3 Die Menge L

Die vollständige Lösungsmenge von (1) erhalte ich gemäß (9) durch die Vereinigung von L_0 mit L_1, weshalb (13) mit (19) disjunktiv zu verknüpfen ist. Zum Zwecke der Vereinfachung werde ich zunächst (13) umschreiben als

$$\begin{aligned} Q \in L_0 &\iff a = b \ \wedge \ [y = 0 \ \wedge \ x = -a] \\ &\iff y = 0 \ \wedge \ [a = b \ \wedge \ x = y^2/4 - a] \\ &\iff [y = 0 \ \wedge \ a = b] \ \wedge \ x = \frac{1}{4}\Big(y + \frac{a-b}{y}\Big)^2 - a \\ &\iff y = 0 \ \wedge \ y \geq \sqrt{|a-b|} \ \wedge \ x = \frac{1}{4}\Big(y + \frac{a-b}{y}\Big)^2 - a, \end{aligned}$$

wobei letztere Äquivalenz richtig ist wegen

$$\begin{aligned} y = 0 \ \wedge \ a = b &\iff y = 0 \ \wedge \ 0 = \sqrt{|a-b|} \\ &\iff y = 0 \ \wedge \ (0 = \sqrt{|a-b|} \ \vee \ \text{„falsch“}) \\ &\iff y = 0 \ \wedge \ (0 = \sqrt{|a-b|} \ \vee \ 0 > \sqrt{|a-b|}) \\ &\iff y = 0 \ \wedge \ 0 \geq \sqrt{|a-b|} \\ &\iff y = 0 \ \wedge \ y \geq \sqrt{|a-b|}. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich die gesuchte für $Q \in L$ notwendige und hinreichende Bedingung zu

$$\begin{aligned} Q \in L &\iff Q \in L_0 \ \vee \ Q \in L_1 \\ &\iff \Big[y = 0 \ \wedge \ y \geq \sqrt{|a-b|} \ \wedge \ x = \frac{1}{4}\Big(y + \frac{a-b}{y}\Big)^2 - a\Big] \ \vee \\ &\qquad \Big[y \neq 0 \ \wedge \ y \geq \sqrt{|a-b|} \ \wedge \ x = \frac{1}{4}\Big(y + \frac{a-b}{y}\Big)^2 - a\Big], \end{aligned}$$

$$\boxed{Q \in L \iff y \geq \sqrt{|a-b|} \ \wedge \ x = \frac{1}{4}\left(y + \frac{a-b}{y}\right)^2 - a,} \tag{20}$$

wobei letzter Schluß wegen $A \wedge B \vee \bar{A} \wedge B \Leftrightarrow B$ richtig ist. Somit ist der reelle Fall vollständig gelöst.

2 Der komplexe Fall

Gegeben seien nun komplexe Zahlen a, b und y. Gesucht ist die Menge der der Gleichung (1) genügenden komplexen Zahlen x.
Zunächsteinmal ist zu klären, welche Bedeutung der Quadratwurzel beigelegt werden soll. Währenddessen nämlich im Rellen die Wurzel w einer reellen Zahl r eindeutig als nichtnegative Lösung der Gleichung $w^2 = r$ definiert ist, definiert man im Komplexen die Wurzel w einer komplexen Zahl z nur als Lösung der Gleichung $w^2 = z$, und bleibt damit zweideutig. - Für ein reelles Zahlenpaar a, b gilt (siehe [1])

$$\sqrt{a + \mathrm{j}b} \;=\; \pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} \;+\; \mathrm{j}\ \mathrm{sgn}(b)\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right), \tag{21}$$

wobei die Funktion sgn das Vorzeichen meint, und hier gemäß

$$\mathrm{sgn}(x) \;=\; \begin{cases} -1 & \text{für} \quad x < 0 \\ +1 & \text{für} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

definiert ist. - Um Eindeutigkeit zu erreichen, betrachtet man im Komplexen oft den *Hauptwert* der Wurzel. Dies ist jene Lösung w der Gleichung $w^n = z$, die mit der reellen Achse den betragsmäßig kleinsten Winkel bildet; im Zweifelsfalle jene Lösung mit $\Im(w) > 0$. Mithin erhält man in (21) den Hauptwert gerade bei Verwendung des positiven Vorzeichens. Den zweiten Wert werde ich *Nebenwert* nennen.
Basierend auf komplexen Quadrupeln betrachte ich die ansonsten analog zu Abschnitt 1 definierten Mengen L, L_0 und L_1.

2.1 Die Menge L_0

Unabhängig davon, ob die Wurzeln in (1) als Haupt- oder Nebenwerte betrachtet werden, ist der Rechenweg aus Abschnitt 1.1 auch im Komplexen richtig, weshalb wieder gilt

$$Q \in L_0 \iff y = 0 \;\wedge\; a = b \;\wedge\; x = -a. \tag{22}$$

Sind also reelle Zahlen a, b und $y = 0$ vorgegeben, so existiert genau dann eine Lösung x von (1), wenn $a = b$ gilt, und diese ist (im Falle ihrer Existenz) reell.

2.2 Die Menge L_1

Der in Abschnitt 1.2 eingeschlagene Weg ist im Komplexen (bis zum Auftauchen von Beträgen) gangbar, wenn die Wurzeln in (1) entweder beide als Hauptwerte oder beide als Nebenwerte verstanden werden. Für $Q \in L_1$ habe ich dann folgende notwendigen Bedingungen:

$$\begin{aligned} B_1 &: \; y \neq 0, \\ B_2 &: \; y = \sqrt{x+a} \;+\; \sqrt{x+b}, \\ B_4 &: \; x = \frac{1}{4}\left(y + \frac{a-b}{y}\right)^2 - a. \end{aligned}$$

Sind nun a, b und $y \neq 0$ gegebene *reelle* Zahlen, so ist die Lösung x von (1) im Falle ihrer Existenz *notwendig reell*. Dann ist aber das ganze Quadrupel reell, weshalb alle Schlußfolgerungen aus Abschnitt 1.2 richtig sind.

3 Abschließende Bemerkungen

Der auf Seite 1 vorab angegebene Zusammenhang ist nun vollständig bewiesen; es ist gezeigt, daß bei gegebenen *reellen* Zahlen a, b und y auch die Lösung x von (1) (im Falle ihrer Existenz) notwendig reell ist. Dies gilt allerdings nur dann, wenn die Wurzeln in (1) beide als Hauptwert oder beide als Nebenwert interpretiert werden. Man überzeugt sich leicht davon, daß bei ungleichartiger Interpretation der Wurzeln durchaus eine komplexe Lösung x existieren kann.

Obwohl der komplexe Fall bei weitem nicht abgearbeitet ist, werde ich diese Schrift hier enden lassen und mich wieder anderen Problemen zuwenden.

Literatur

[1] Solyga, S.: Die Quadratwurzel im Komplexen. Arbeit vom 29.11.1992