Die Lösung der Gleichung

$$y \;=\; \sqrt{x+a} \;-\; \sqrt{x+b}$$

Steffen Solyga
Technische Universität Berlin*

6. Dezember 1994

Gegeben seien die Zahlen a, b und y. Man ermittle alle Zahlen x, die mit den gegebenen die Gleichung

$$y \;=\; \sqrt{x+a} \;-\; \sqrt{x+b} \tag{1}$$

lösen. - Die wohl wichtigste Lösung sei vorab angegeben:
Sind a, b und y reelle Zahlen, so existiert eine reelle Lösung x von (1) genau dann, wenn eine der folgenden drei (sich gegenseitig ausschließenden) Bedingungen erfüllt ist:

$$A \;:\quad a > b \quad \wedge \quad 0 < y \leq \sqrt{a-b}, \tag{2}$$

$$B \;:\quad a = b \quad \wedge \quad y = 0, \tag{3}$$

$$C \;:\quad a < b \quad \wedge \quad -\sqrt{b-a} \leq y < 0. \tag{4}$$

Währenddessen im Falle B jedes $x \geq -a$ eine Lösung ist, gilt in den Fällen A und C

$$x \;=\; \frac{1}{4}\left(y + \frac{a-b}{y}\right)^2 - a, \tag{5}$$

$$x \;=\; \frac{1}{4}\left(y + \frac{b-a}{y}\right)^2 - b, \tag{6}$$

wobei diese beiden Gleichungen identisch sind.
Ich werde nun die Lösbarkeitsbedingungen und die Lösungsformel herleiten.

*Institut für Theoretische Elektrotechnik, EN-2, Einsteinufer 17, 10587 Berlin

1 Die Lösbarkeitsbedingungen

Ich betrachte die reellwertige Funktion f der reellen Veränderlichen x mit den reellen Parametern a und b

$$y = f(x) = \sqrt{x+a} - \sqrt{x+b} \tag{7}$$

und untersuche ihren Definitionsbereich. Offenbar gilt

$$D = \Big[-\min(a,b), \infty\Big). \tag{8}$$

Weiterhin gilt bei beliebiger Wahl der Parameter

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0, \tag{9}$$

weil bei großen x die (i.allg. nicht verschwindende) Differenz der Parameter nicht ins Gewicht fällt. Mittels Differentiation prüft man leicht, daß f stetig und monoton ist.

$$2f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x+a}} - \frac{1}{\sqrt{x+b}} \tag{10}$$

1.1 Der Fall $a > b$

Es ist f streng monoton fallend, weshalb sie ihr Maximum am unteren Ende des Definitionsbereiches, d.h. in $x = -b$ annimmt. Sie besitzt kein Minimum; die untere Grenze ist wegen (9) gerade 0. Daher gilt

$$0 < f(x) \leq \sqrt{a-b}. \tag{11}$$

Wegen Stetigkeit und strenger Monotonie nimmt sie jeden Wert aus $(0, \sqrt{a-b}]$ genau einmal an, weshalb (1) im Falle A sogar *genau eine* Lösung x besitzt.

1.2 Der Fall $a = b$

Es ist f für alle $x \geq -a$ definiert und verschwindet überall. Daher ist im Falle B jedes $x \geq -a$ eine Lösung von (1).

1.3 Der Fall $a < b$

Es ist f streng monoton wachsend, weshalb sie am unteren Ende des Definitionsbereiches, d.h. in $x = -a$, ihr absolutes Minimum annimmt. Ein absolutes Maximum besitzt sie nicht; ihre obere Grenze ist wegen (9) gerade 0. Mithin gilt

$$-\sqrt{b-a} \leq f(x) < 0. \tag{12}$$

Da f außerdem stetig ist, nimmt sie jeden Wert aus $[-\sqrt{b-a}, 0)$ genau einmal an. Mithin besitzt (1) im Falle C *genau eine* reelle Lösung x.

2 Die Lösungsformel

Ich werde nun (1) nach x umstellen und danach überprüfen, ob die hergeleitete Formel tatsächlich zur Lösung führt.

Der Fall $y = 0$.
Notwendig dafür, daß (1) bei gegebenen reellen Zahlen a und b sowie $y = 0$ eine reelle Lösung x besitzt, ist offenbar $a = b \ \wedge \ x \geq -a$. Man sieht sofort, daß diese Bedingung auch hinreichend ist, womit der Fall B erledigt ist.

Der Fall $y \neq 0$.

$$
\begin{aligned}
y^2 &= x + a \ - \ 2\sqrt{(x+a)(x+b)} \ + \ x + b \\
(y^2 - 2x - a - b)^2 &= 4(x+a)(x+b) \\
4x(x+a+b) - 4xy^2 + & \\
+ y^2[y^2 - 2(a+b)] + a^2 + b^2 + 2ab &= 4x(x+a+b) + 4ab \\
4xy^2 &= y^2[y^2 - 2(a+b)] + a^2 + b^2 - 2ab \\
4xy^2 &= y^2[y^2 - 2(a+b)] + (a-b)^2 \\
x &= \frac{1}{4}\Big[y^2 - 2(a+b) + \big(\frac{a-b}{y}\big)^2\Big] \\
x &= \frac{1}{4}\Big[\big(y - \frac{a-b}{y}\big)^2 - 4b\Big]
\end{aligned}
$$

$$
x = \frac{1}{4}\left(y + \frac{b-a}{y}\right)^2 - b, \tag{13}
$$

$$
x = \frac{1}{4}\left(y + \frac{a-b}{y}\right)^2 - a \tag{14}
$$

Man könnte nun durch Einsetzen prüfen, ob diese Formeln tatsächlich die richtige Lösung liefern, man kann es sich allerdings aus folgendem Grunde ersparen:
Genügen die Zahlen a, b und y der Bedingung A, so besitzt (1) gemäß Abschnitt 1.1 genau eine Lösung x. Andererseits genügt *jede* Lösung (a, b, x, y) von (1) auch den Gleichungen (13) und (14). Nun könnten (13) und (14) bei gegebenen Zahlen a, b und y zwar zusätzliche Lösungen x besitzen, aber das ist offensichtlich nicht der Fall. Setze ich also in eine dieser Gleichungen der Bedingung A genügende Zahlen a, b und y ein, so muß ein derart berechnetes x auch *die* Lösung von (1) sein.

Literatur

[1] Solyga, S.: Die Lösung der Gleichung $y = \sqrt{x+a} + \sqrt{x+b}$. Arbeit vom 6.12.1994