Integraldarstellung BESSELscher Funktionen erster Gattung ganzzahliger Ordnung

Steffen Solyga
Technische Universität Berlin*

26. Januar 1995

Bei der harmonischen Analyse des Stromes eines geschwindigkeitsmodulierten Elektronenstrahls treten Integrale der Form

$$f_m(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}(mt - x\sin t)}\mathrm{d}t \tag{1}$$

auf. Glücklicherweise handelt es sich bei den f_m um BESSELsche Funktionen. Währenddessen man [1] Abschnitt 9.2 die Beziehung

$$J_m(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}(mt - x\sin t)}\mathrm{d}t \tag{2}$$

entnimmt, findet man in [2] Abschnitt 3.3.1.3.4.

$$J_{2n}(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \cos(x\sin t)\ \cos(2nt)\,\mathrm{d}t \tag{3}$$

$$J_{2n+1}(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \sin(x\sin t)\ \sin[(2n+1)t]\,\mathrm{d}t \tag{4}$$

und in [3] Punkt 9.1.21 für natürliche Zahlen n

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \cos(nt - x\sin t)\,\mathrm{d}t. \tag{5}$$

Ich werde im folgenden die Gültigkeit von (2) bis (5) für ganzzahlige m bzw. n nachweisen.

*Institut für Theoretische Elektrotechnik, EN-2, Einsteinufer 17, 10587 Berlin

1 Zusammenhang zwischen (2), (3) und (4)

In diesem Abschnitt werde ich zeigen, daß die rechte Seite von (2) für geradzahlige m mit der rechten Seite von (3) und für ungeradzahlige m mit der rechten Seite von (4) identisch ist. Dabei bleibt zunächst offen, ob die rechten Seiten tatsächlich BESSELsche Funktionen erster Gattung repräsentieren.

Übergang zu reellem Integranden.

Ich betrachte für ganze Zahlen m die Funktion

$$\begin{aligned} f_m(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}(mt - x\sin t)}\mathrm{d}t \qquad (6)\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(mt - x\sin t)\,\mathrm{d}t + \frac{\mathrm{j}}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(mt - x\sin t)\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Für das erste Integral erhält man mittels der Substitution $t = -t'$

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi}\cos(mt - x\sin t)\,\mathrm{d}t &= \int_{0}^{\pi}\cos(mt - x\sin t)\,\mathrm{d}t - \int_{0}^{-\pi}\cos(mt - x\sin t)\,\mathrm{d}t\\ &= \int_{0}^{\pi}\cos(mt - x\sin t)\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{\pi}\cos(mt' - x\sin t')\,\mathrm{d}t'\\ &= 2\int_{0}^{\pi}\cos(mt - x\sin t)\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

währenddessen man, wie erwartet, durch selbige Substitution für das zweite Integral

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi}\sin(mt - x\sin t)\,\mathrm{d}t &= \int_{0}^{\pi}\sin(mt - x\sin t)\,\mathrm{d}t - \int_{0}^{-\pi}\sin(mt - x\sin t)\,\mathrm{d}t\\ &= \int_{0}^{\pi}\sin(mt - x\sin t)\,\mathrm{d}t - \int_{0}^{\pi}\sin(mt' - x\sin t')\,\mathrm{d}t'\\ &= 0 \end{aligned}$$

erhält. Es gilt also

$$f_m(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\cos(mt - x\sin t)\,\mathrm{d}t, \qquad (7)$$

und man erhält unter Verwendung eines Additionstheorems

$$f_m(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\sin(mt)\sin(x\sin t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\cos(mt)\cos(x\sin t)\,\mathrm{d}t. \qquad (8)$$

In den Abbildungen 1 bis 4 sind die Integranden aus (8) für $m = 1$ und $m = 2$ dargestellt.

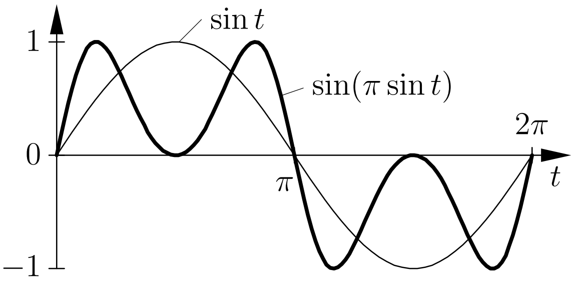

Abbildung 1: Die Funktionen $\sin t$ und $\sin(\pi \sin t)$ sind auf $[0, \pi]$ nicht orthogonal.

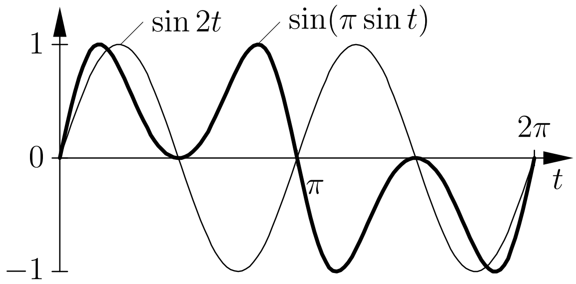

Abbildung 2: Die Funktionen $\sin(2t)$ und $\sin(\pi \sin t)$ sind auf $[0, \pi]$ orthogonal.

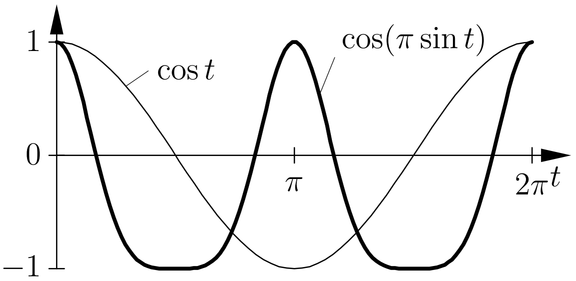

Abbildung 3: Die Funktionen $\cos t$ und $\cos(\pi \sin t)$ sind auf $[0, \pi]$ orthogonal.

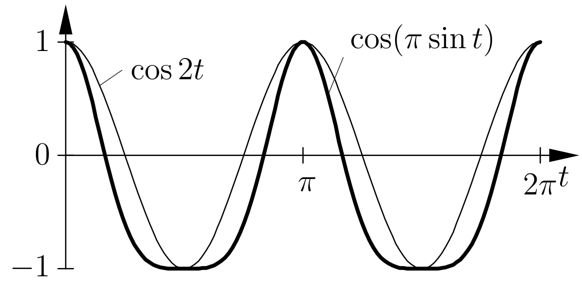

Abbildung 4: Die Funktionen $\cos(2t)$ und $\cos(\pi \sin t)$ sind auf $[0, \pi]$ nicht orthogonal.

Offenbar verschwindet für $m = 1$ das zweite Integral aus (8), währenddessen das erste Integral für $m = 2$ verschwindet. Ich werde nun zeigen, daß dieser Zusammenhang allgemein für alle ungeradzahligen bzw. geradezahligen m besteht.

Vereinfachung für gerade m.

Für jede ganze Zahl n ist $m = 2n$ gerade und es gilt

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \sin(mt)\sin(x\sin t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^{\pi/2} \sin(2nt)\sin(x\sin t)\,\mathrm{d}t - \int_\pi^{\pi/2} \sin(2nt)\sin(x\sin t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\pi/2} \ldots\,\mathrm{d}t + \int_0^{\pi/2} \underbrace{\sin[2n(\pi - t')]}_{-\sin(2nt')} \sin[x \underbrace{\sin(\pi - t')}_{\sin t'}]\,\mathrm{d}t' \\
&= 0,
\end{aligned}$$

wobei im zweiten Integral $t = \pi - t'$ substituiert wurde. Mithin verschwindet für gerade m das erste Integral in (8), (vgl. Abb. 2). Das zweite Integral verschwindet sicherlich nicht für alle x, weil sonst f_m identisch verschwinden würde und dann keinesfalls eine Besselsche Funktion sein könnte.

Vereinfachung für ungerade m.

Für jede ganze Zahl n ist $m = 2n+1$ ungerade und es gilt

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} \cos(mt)\cos(x\sin t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^{\pi/2} \cos[(2n+1)t]\cos(x\sin t)\,\mathrm{d}t \;-\; \int_{\pi}^{\pi/2} \cos[(2n+1)t]\cos(x\sin t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\pi/2} \ldots\,\mathrm{d}t \;+\; \int_0^{\pi/2} \underbrace{\cos[(2n+1)(\pi-t')]}_{-\cos[(2n+1)t']}\cos[x\underbrace{\sin(\pi-t')}_{\sin t'}]\,\mathrm{d}t' \\ &= 0.\end{aligned}$$

Im zweiten Integral wurde wieder $t = \pi - t'$ substituiert. Mithin verschwindet für ungerade m das zweite Integral in (8).

Die allgemeine Formel.

Es gilt also für alle ganzen Zahlen m und alle reellen Zahlen x

$$\boxed{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}(mt - x\sin t)}\mathrm{d}t \;=\; \begin{cases} \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} \sin(mt)\sin(x\sin t)\,\mathrm{d}t & \text{wenn } m \text{ gerade,} \\ \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} \cos(mt)\cos(x\sin t)\,\mathrm{d}t & \text{wenn } m \text{ ungerade.}\end{cases}} \tag{9}$$

2 f_m ist BESSELsche Funktion m-ter Ordnung

Das Fundamentalsystem der BESSELschen Gleichung

$$\mathbf{L}(y) \quad = \quad x^2\ddot{y} + x\dot{y} + (x^2-m^2)y \quad = \quad 0 \tag{10}$$

ist für jede ganze Zahl m durch die beiden Funktionen $J_m(x)$ und $Y_m(x)$, die BESSELschen Funktionen erster und zweiter Gattung der Ordung m gegeben (siehe z.B. [2]).
Bekanntlich sind die BESSELschen Funktionen erster Gattung auf ihrem Definitionsbereich beschränkt, währenddessen die WEBERschen Funktionen (BESSELsche zweiter Gattung) in $x = 0$ unbeschränkt sind. Genügt folglich eine beliebige Funktion $f(x)$ der BESSELschen Gleichung (10) und ist außerdem auf ihrem Definitionsbereich beschränkt, so ist sie proportional zu J_m.
Ich werde im folgenden zeigen, daß f_m diese beiden Eigenschaften besitzt, und daß die Proportionalitätskonstante gerade eins beträgt (siehe auch [4], Anhang, Teil I, §4.1).

f_m genügt der BESSELschen Gleichung.

Gemäß (8) läßt sich f_m als Summe der Funktionen g_m und h_m darstellen, wenn diese als

$$g_m = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin(mt)\sin(x\sin t)\,\mathrm{d}t, \qquad h_m = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(mt)\cos(x\sin t)\,\mathrm{d}t \tag{11}$$

erklärt werden. Offenbar genügt g_m aber der BESSELschen Gleichung, denn es ist

$$\begin{aligned}\dot{g}_m &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin(mt)\cos(x\sin t)\sin t\,\mathrm{d}t,\\ \ddot{g}_m &= -\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin(mt)\sin(x\sin t)\sin^2 t\,\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

$$\pi\mathbf{L}(g_m) \quad = \quad \int_0^\pi (x^2\cos^2 t - m^2)\sin(mt)\sin(x\sin t)\,\mathrm{d}t \; + \; x\int_0^\pi \sin t\sin(mt)\cos(x\sin t)\,\mathrm{d}t,$$

wobei die rechte Seite der letzten Gleichung verschwindet, was man mittels zweimaliger partieller Integration

$$\begin{aligned} & x\int_0^\pi \sin t\sin(mt)\cos(x\sin t)\,\mathrm{d}t \quad = \\ = \quad & -x\int_0^\pi -\cos t\Big[m\cos(mt)\cos(x\sin t) - \sin(mt)\sin(x\sin t)x\cos t\Big]\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= m\int_0^\pi \cos(mt)\cos(x\sin t)x\cos t\,\mathrm{d}t - \int_0^\pi x^2\cos^2 t\sin(mt)\sin(x\sin t)\,\mathrm{d}t \\
&= m\int_0^\pi m\sin(mt)\sin(x\sin t)\,\mathrm{d}t - \int_0^\pi x^2\cos^2 t\sin(mt)\sin(x\sin t)\,\mathrm{d}t \\
&= -\int_0^\pi (x^2\cos^2 t - m^2)\sin(mt)\sin(x\sin t)\,\mathrm{d}t,
\end{aligned}$$

nachweist.[1] Es genügt aber auch h_m der Besselschen Gleichung, denn es ist

$$\begin{aligned}
\dot{h}_m &= -\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(mt)\sin(x\sin t)\sin t\,\mathrm{d}t, \\
\ddot{h}_m &= -\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(mt)\cos(x\sin t)\sin^2 t\,\mathrm{d}t,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\pi\mathbf{L}(h_m) &= \int_0^\pi (x^2\cos^2 t - m^2)\cos(mt)\cos(x\sin t)\,\mathrm{d}t \;-\; x\int_0^\pi \sin t\cos(mt)\sin(x\sin t)\,\mathrm{d}t \\
&= \ldots + x\int_0^\pi -\cos t\Big[-m\sin(mt)\sin(x\sin t) \;+\; \cos(mt)\cos(x\sin t)x\cos t\Big]\,\mathrm{d}t \\
&= \ldots + m\int_0^\pi \sin(mt)\sin(x\sin t)x\cos t\,\mathrm{d}t \;-\; \int_0^\pi x^2\cos^2 t\cos(mt)\cos(x\sin t)\,\mathrm{d}t \\
&= \ldots + m\int_0^\pi m\cos(mt)\cos(x\sin t)\,\mathrm{d}t \;-\; \int_0^\pi x^2\cos^2 t\cos(mt)\cos(x\sin t)\,\mathrm{d}t \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Nun ist die Besselsche Gleichung sowohl linear als auch homogen, weshalb sie mit g_m und h_m auch durch $f_m = g_m + h_m$ gelöst wird.

f_m ist beschränkt.

Die Funktion g_m ist beschränkt, denn 1 ist eine ihrer Schranken:

$$\begin{aligned}
|g_m| &= \frac{1}{\pi}\Big|\int_0^\pi \sin(mt)\sin(x\sin t)\,\mathrm{d}t\Big| \;\le\; \frac{1}{\pi}\int_0^\pi |\sin(mt)\sin(x\sin t)|\,\mathrm{d}t \;\le \\
&\le \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \mathrm{d}t \;=\; 1.
\end{aligned}$$

Analog beweist man $|h_m| \le 1$, weshalb nach der Dreiecksungleichung $|f_m| \le 2$ gilt.

[1] Dies ist für *alle* ganzen Zahlen m der Fall. Für gerade m ist g_m die triviale Lösung von (10).

Es ist $f_m = J_m$.

Den am Anfang dieses Abschnittes getätigten Überlegungen zufolge existiert also zu jeder ganzen Zahl m eine reelle Zahl c_m, so daß gilt

$$f_m(x) = c_m \, J_m(x). \tag{12}$$

Für alle nichtnegativen m folgt daraus - die m-malige Differenzierbarkeit von f_m zunächst einmal vorausgesetzt - die Richtigkeit von

$$f_m^{(m)}(0) = c_m \, J_m^{(m)}(0), \tag{13}$$

woraus die Koeffizienten wenigstens für $m \geq 0$ bestimmt werden können.[2] Für den Wert der m-ten Ableitung der BESSELschen Funktion hat man (siehe Anhang)

$$J_m^{(m)}(0) = \frac{1}{2^m}. \tag{14}$$

Die m-te Ableitung von f_m berechne ich unter Verwendung ihrer komplexen Form (6) zu

$$f_m^{(m)}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\mathrm{j} \sin t)^m \mathrm{e}^{-\mathrm{j}(mt - x \sin t)} \mathrm{d}t.$$

Für den Wert an der Stelle $x = 0$ gilt daher

$$f_m^{(m)}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\mathrm{j} \sin t \, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}t}\right)^m \mathrm{d}t = \frac{1}{2^m} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(1 - \mathrm{e}^{-2\mathrm{j}t}\right)^m \mathrm{d}t,$$

wobei das Integral offenbar 2π liefert

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} \left(1 - \mathrm{e}^{-2\mathrm{j}t}\right)^m \mathrm{d}t &= \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \left(-\mathrm{e}^{-2\mathrm{j}t}\right)^k \mathrm{d}t \\
&= \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (-1)^k \int_{-\pi}^{\pi} \left[\cos(2kt) - \mathrm{j} \sin(2kt)\right] \mathrm{d}t \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}t \; + \; \sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} (-1)^k \frac{1}{2k} \Big[\sin(2kt) + \mathrm{j} \cos(2kt)\Big]_{-\pi}^{\pi} \\
&= 2\pi,
\end{aligned}$$

weshalb man schließlich

$$f_m^{(m)}(0) = \frac{1}{2^m}$$

[2]Wie üblich ist $f^{(0)} = f$ zu setzen.

erhält. Mithin sind wegen (14) und (13) die Koeffizienten c_m für alle nichtnegativen Indizes bestimmt; es gilt

$$c_m = 1 \qquad \forall\, m \geq 0. \tag{15}$$

Um nun die Koeffizienten negativen Index' zu bestimmen, mache ich von der Eigenschaft

$$J_{-m}(x) = (-1)^m \, J_m(x) \tag{16}$$

der BESSELschen Funktionen ganzzahligen Index' Gebrauch (siehe Anhang), weshalb ich weiterhin nur nichtnegative m zu betrachten brauche. Offenbar besitzt f_m diese Eigenschaft auch, denn es ist wegen (11) $f_{-m} = g_{-m} + h_{-m} = -g_m + h_m$, wobei g_m für gerade m und h_m für ungerade m verschwindet, so daß also gilt

$$f_{-m}(x) = \left\{ \begin{array}{rll} f_m(x) & \text{, wenn} & m \text{ gerade} \\ -f_m(x) & \text{, wenn} & m \text{ ungerade} \end{array} \right\} = (-1)^m \, f_m(x).$$

Wegen (12), (15) und (16) gilt daher

$$f_{-m}(x) = (-1)^m \, J_m(x) = J_{-m}(x),$$

weshalb schießlich für alle nichtnegativen m gilt $c_{-m} = 1$ bzw.

$$c_m = 1 \qquad \forall\, m \in G.$$

Damit ist endlich der Nachweis dafür erbracht, daß für alle ganzen Zahlen m und alle reellen Zahlen x gilt

$$\boxed{J_m(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}(mt - x \sin t)} \mathrm{d}t.} \tag{17}$$

A Definition und Eigenschaften der J_m

Es seien ν und z komplexe Zahlen. Die komplexwertige BESSELsche Funktion erster Art ν-ter Ordnung des komplexen Arguments z ist definiert als

$$J_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(\nu+k+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2k}, \tag{18}$$

wie man es in [2] 3.3.1.3.4. und in [3] 9.1.10 nachlesen kann. Sie ist in der ganzen z-Ebene für jedes komplexe ν analytisch, was im wesentlichen aus dem analytischen Verhalten der Funktion $1/\Gamma(z)$ geschlossen werden kann. Desweiteren besitzt sie die Eigenschaft

$$z^2 \ddot{J}_\nu + z\dot{J}_\nu + (z^2-\nu^2)J_\nu = 0, \tag{19}$$

d.h., sie löst die BESSELsche Gleichung.
Ich werde mich im folgenden auf reelle Argumente x und ganzzahlige Indizes $\pm m$ beschränken, wobei m nun eine natürliche Zahl darstellt. Dann erhält man aus (18) mit $\nu = m$ bzw. $\nu = -m$

$$J_m(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,(m+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{m+2k}, \tag{20}$$

$$J_{-m}(x) = \sum_{k=m}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,(k-m)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-m}, \tag{21}$$

wobei die letzte Gleichung unter Verwendung der Beziehung

$$\frac{1}{\Gamma(k-m+1)} = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad k < m, \\ 1/(k-m)! & \text{für} \quad k \geq m \end{cases}$$

abgeleitet wurde. Durch Neuindizierung $k := k - m$ in (21) erhält man

$$\begin{aligned} J_{-m}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+m}}{(m+k)!\,k!} \left(\frac{x}{2}\right)^{m+2k}, \\ J_{-m}(x) &= (-1)^m\, J_m(x). \end{aligned} \tag{22}$$

Für die Ableitungen erhält man durch gliedweise Differentiation von (20)

$$\begin{aligned} J'_m(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,(m+k)!} \frac{m+2k}{2} \left(\frac{x}{2}\right)^{m+2k-1}, \\ J''_m(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,(m+k)!} \frac{(m+2k)(m+2k-1)}{2^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{m+2k-2}, \\ &\vdots \\ J^{(m)}_m(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,(m+k)!} \frac{(m+2k)(m+2k-1)\dots(2k+1)}{2^m} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}, \end{aligned}$$

und damit folglich

$$J_m^{(m)}(x) = \frac{1}{2^m} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,(m+k)!} \frac{(2k+m)!}{(2k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}. \tag{23}$$

Für negative Indizes erhält man mittels Differentiation von (22) daher

$$J_{-m}^{(m)}(x) = \left(\frac{-1}{2}\right)^m \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,(m+k)!} \frac{(2k+m)!}{(2k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}. \tag{24}$$

Damit lauten die Werte an der Stelle $x = 0$[3]

$$J_m^{(m)}(0) = \frac{1}{2^m}, \tag{25}$$

$$J_{-m}^{(m)}(0) = \left(\frac{-1}{2}\right)^m. \tag{26}$$

Literatur

[1] Hamilton, D.R.; Knipp, J.K.; Kuper, J.B.: Klystrons And Microwave Triodes. McGraw-Hill Book Company, Inc., New York 1948

[2] Bronstein, I.N.; Semendjajew, K.A.: Taschenbuch der Mathematik. BSB B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1985

[3] Abramowitz, M.; Stegun, I.A.: Handbook Of Mathematical Functions. Dover Publications, Inc., New York 1970

[4] Tychonoff, A.N.; Samarski, A.A.: Differentialgleichungen der mathematischen Physik. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1959

[3] In [4] ist offenbar ein Fehler; dort wird behauptet, (25) gelte auch für negative m.