Bewegung einer Punktladung im homogenen Magnetfeld

Steffen Solyga*
Technische Universität Berlin, EN-2, Einsteinufer 17, D-10587 Berlin

Abstract

Im folgenden wird die Bewegung einer Punktladung in einem zeitlich und örtlich homogenen Magnetfeld untersucht. Es werden Bewegungsparameter, wie z.B. die Zyklotronfrequenz definiert und praktisch gedeutet. Währenddessen die Abhängigkeit der Masse der Punktladung von seiner Geschwindigkeit berücksichtigt wird, werden Strahlungsverluste vernachlässigt.

1 EINLEITUNG

Es ist bekannt, daß die Bahnkurve einer Punktladung im homogenen magnetischen Feld eine Schraubenlinie ist, deren Radius und Steigung von der Energie der Ladung und der Stärke des magnetischen Feldes abhängen. Weil aber veröffentlichte Rechnungen — z.B. [1] — meist bereits die Fliehkraft verwenden, ohne vorher gezeigt zu haben, daß nur eine Schraubenbahn möglich ist, mußte ich dieses Rad neu erfinden.

2 γ IST EINE KONSTANTE

Für die Impulsänderung der Punktladung gilt bekanntlich

$$\dot{\mathbf{p}} \quad = \quad q\mathbf{v} \times \mathbf{B}, \tag{1}$$

woraus man durch Multiplikation mit $\mathbf{p} = m_0\gamma\mathbf{v}$ erhält $\mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{p}} = qm_0\gamma\mathbf{v} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B})$, was wiederum einfach als

$$\frac{\mathrm{d}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{p})}{\mathrm{d}t} \quad = \quad 0$$

geschrieben werden kann. Wenn aber der Betrag des Impulses konstant ist, dann ist wegen

$$\gamma^2 \quad = \quad 1 + \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}}{m_0^2 c^2}$$

auch γ eine Konstante. Mithin erfährt die Energie der Punktladung keine Änderung.

3 ALLGEMEINE LÖSUNG VON (1)

Richtet man ein kartesischen System mit der z-Achse nach dem konstanten Magnetfeld aus, so gilt

$$\mathbf{B} \quad = \quad B_0\mathbf{e}_z,$$

und man kann (1) schreiben als

$$\begin{aligned} m_0\gamma\ddot{x} &= q\dot{y}B_0 && (2)\\ m_0\gamma\ddot{y} &= -q\dot{x}B_0 && (3)\\ m_0\gamma\ddot{z} &= 0. && (4) \end{aligned}$$

Durch Differentiation von (2) und (3) erhält man als notwendige Bedingung für x und y

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \omega^2 x &= \omega^2 k_x && (5)\\ \ddot{y} + \omega^2 y &= \omega^2 k_y, && (6) \end{aligned}$$

worin k_x und k_y beliebige Konstanten sind und

$$\omega \quad = \quad qB_0/m_0\gamma$$

gesetzt wurde. Weil $x = \sin\omega t + k_x$ eine partikuläre Lösung von (5) ist, besitzt die allgemeine Lösung des Systems (5), (6) die Gestalt

$$\begin{aligned} x &= a\cos\omega t + (c' + 1)\sin\omega t + k_x\\ y &= b\cos\omega t + (d' + 1)\sin\omega t + k_y. \end{aligned}$$

Durch Einsetzen in (2) und (3) reduzieren sich die Konstanten vermöge $d' + 1 = -a$ und $c' + 1 = b$, und unter Beachtung von (4) lautet die allgemeine Lösung des Systems (2) bis (4) schließlich

$$\begin{aligned} x &= a\cos\omega t + b\sin\omega t + k_x && (7)\\ y &= b\cos\omega t - a\sin\omega t + k_y && (8)\\ z &= ct + k_z. && (9) \end{aligned}$$

4 GEOMETRISCHE DEUTUNG

Offenbar handelt es sich bei den Gleichungen (7), (8) um die Parameterdarstellung eines Kreises mit dem Mittelpunkt in (k_x, k_y) und einem Radius von $\sqrt{a^2 + b^2}$. Schreibt man sie nämlich zunächsteinmal in der Form

$$\begin{aligned} x - k_x &= a\cos\omega t + b\sin\omega t, && (10)\\ y - k_y &= b\cos\omega t - a\sin\omega t, && (11) \end{aligned}$$

so überzeugt man sich leicht von der Richtigkeit von

$$(x - k_x)^2 + (y - k_y)^2 \quad = \quad a^2 + b^2,$$

wobei es sich ganz offensichtlich um die Kurvengleichung des angesprochenen Kreises handelt. Da die

*solyga@tetibm2.ee.tu-berlin.de

z-Koordinate wegen (9) linear mit t zunimmt, ist die Bahnkurve folglich eine Schraubenlinie konstanter Steigung. Ist r der Radius der Schraubenlinie, und definiert man ihre Steigung durch $s = \mathrm{d}z/\mathrm{d}\varphi$, erhält man

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{a^2 + b^2} \qquad (12) \\ s &= c/\omega. \end{aligned}$$

Deutet man den Parameter t wieder als Zeit, so ist ω die Winkelgeschwindigkeit des Punktes und c seine Steigungsgeschwindigkeit — beides sind Konstanten. Aus (10), (11) gewinnt man außerdem durch Differentiation und Addition

$$x - k_x = -\dot{y}/\omega, \qquad (13)$$
$$y - k_y = \dot{x}/\omega \qquad (14)$$

und durch Lösen des linearen Systems (10), (11)

$$a\omega = -\dot{y}\cos\omega t - \dot{x}\sin\omega t, \qquad (15)$$
$$b\omega = \dot{x}\cos\omega t - \dot{y}\sin\omega t, \qquad (16)$$

woraus sich wiederum

$$\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \omega\sqrt{a^2 + b^2},$$

gewinnen läßt. Bezeichnet man die linke Seite dieser Gleichung als transversale Geschwindigkeit und schreibt dafür $v_\perp$, so hat man mit (12) den Zusammenhang

$$v_\perp = \omega r.$$

Daß es sich bei $v_\perp$ um eine Konstante handelt, ist im Prinzip seit der Gleichung (4) bekannt. Man erinnere sich an die Konstanz der Geschwindigkeit (Abschnitt 2).

5 LÖSUNG DES ANFANGSWERTPROBLEMS

Das Differentialgleichungssystem (2) bis (4) ist als Anfangswertproblem mit $\mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0$ und $\dot{\mathbf{r}}(t_0) = \dot{\mathbf{r}}_0$ eindeutig lösbar, weshalb sich die sechs Konstanten in (7) bis (9) aus $\mathbf{r}_0$ und $\dot{\mathbf{r}}_0$ eindeutig bestimmen lassen müssen. Aus (15), (16) und (9) sowie (13), (14) und (9) erhält man

$$\begin{aligned} a\omega &= -\dot{y}_0\cos\omega t_0 - \dot{x}_0\sin\omega t_0, \\ b\omega &= \dot{x}_0\cos\omega t_0 - \dot{y}_0\sin\omega t_0, \\ c &= \dot{z}_0, \\ k_x &= x_0 + \dot{y}_0/\omega, \\ k_y &= y_0 - \dot{x}_0/\omega, \\ k_z &= z_0 - \dot{z}_0 t_0, \end{aligned}$$

weshalb die Lösung des Anfangswertproblems lautet

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \frac{\dot{y}_0}{\omega}\big[1 - \cos(\omega t - \omega t_0)\big] + \frac{\dot{x}_0}{\omega}\sin(\omega t - \omega t_0), \\ y &= y_0 + \frac{\dot{x}_0}{\omega}\big[\cos(\omega t - \omega t_0) - 1\big] + \frac{\dot{y}_0}{\omega}\sin(\omega t - \omega t_0) \\ z &= z_0 + \dot{z}_0(t - t_0). \end{aligned}$$

6 ZUSAMMENFASSUNG

Eine Punktladung bewegt sich in einem homogenen Magnetfeld auf einer Schraubenbahn konstanten Radius' und konstanter Steigung. Energie, Impuls und damit auch Geschwindigkeit sind konstant. Zerlegt man den Geschwindigkeitsvektor bezüglich des Magnetfeldes in eine longitudinale und eine transversale Komponente, so sind deren Beträge ebenfalls konstant und durch die Anfangswerte gegeben. Die Gleichungen zur Berechnung der Winkelgeschwindigkeit — auch *Zyklotronfrequenz* genannt —, des Schraubenradius' und der Schraubensteigung aus den Startwerten lauten:

$$\omega = \frac{qB_0}{m_0\gamma}, \qquad (17)$$

$$r = \frac{v_\perp}{\omega}, \qquad (18)$$

$$s = \frac{v_\parallel}{\omega}, \qquad (19)$$

wobei eine positive Zyklotronfrequenz bedeutet, daß sich die Ladung im mathematisch positiven Sinne bewegt, wenn man dem Magnetfeld hinterherschaut. Die Parameter γ, $v_\perp$ und $v_\parallel$ sind durch die Anfangswerte gegeben.

Stanford, 6. November 1995

7 REFERENCES

[1] A. S. Gilmour, “Principles of Traveling Wave Tubes,” Artech House, Boston/London 1994