

# **Energieauskopplung im gewöhnlichen Klystron – Eindimensionale lineare Theorie –**

S. Solyga

*Zusammenfassung.* Die Wirkungsweise eines konventionellen Verstärkerklystrons läßt sich wegen des Zusammenfalls der grundlegenden Wechselwirkungs- mit der Ausbreitungsrichtung des Elektronenstrahls bereits mittels einer eindimensionalen Analyse sowohl qualitativ als auch quantitativ erfassen. Unter Anwendung des Modells des steifen Elektronenstrahls werden in dieser Arbeit die Umwandlung der kinetischen Strahlenergie in hochfrequente Feldenergie untersucht, Formeln für die wichtigsten Wirkungsgrade hergeleitet und Bedingungen für einen optimalen Betrieb der Auskoppelinrichtung angegeben.

# **Energieauskopplung im gewöhnlichen Klystron – Eindimensionale lineare Theorie –**

Steffen Solyga\*  
Technische Universität Berlin

20. November 2001

Die Wirkungsweise eines konventionellen Verstärkerklystrons läßt sich wegen des Zusammenfalls der grundlegenden Wechselwirkungs- mit der Ausbreitungsrichtung des Elektronenstrahls bereits mittels einer eindimensionalen Analyse sowohl qualitativ als auch quantitativ erfassen. Unter Anwendung des Modells des steifen Elektronenstrahls werden in dieser Arbeit die Umwandlung der kinetischen Strahlenergie in hochfrequente Feldenergie untersucht, Formeln für die wichtigsten Wirkungsgrade hergeleitet und Bedingungen für einen optimalen Betrieb der Auskoppelinrichtung angegeben.

## **1 Einführung**

Im Ausgangsresonator wird die kinetische Energie der Elektronen in hochfrequente Feldenergie gewandelt; der Elektronenstrahl wird demoduliert. Dieser Vorgang ist – wie auch die Geschwindigkeitsmodulation – der linearen Analyse aufgrund der sich ändernden Elektronengeschwindigkeiten nicht ohne weiteres zugänglich. Um zu einer analytischen Lösung des Problems zu gelangen, bedient man sich des Modells des „steifen Elektronenstrahls“ für den verhältnismäßig kurzen Bereich des Ausgangsresonators: Die Positionen der Elektronen zueinander werden als unveränderlich angenommen. Als unmittelbare Konsequenz müssen sich alle Elektronen mit derselben Geschwindigkeit bewegen, welche man sinnvollerweise gleich jener des unmodulierten Strahls und somit als konstant wählt. Auf diese Weise erhält man einen wohldefinierten eingepprägten Strom für die Berechnung des angeregten Hochfrequenzfeldes. Mit Bekanntsein des Feldes kann – analog zur Modulation – der zunächst unbeachtete Energieverlust der Elektronen im Nachhinein aus der von ihnen durchlaufenen Spannung berechnet werden.

Die zu studierende eindimensionale Anordnung ist in Abbildung 2 dargestellt und aus der Gesamtanordnung Abbildung 1 abgeleitet. Im ersten Schritt wird das Klemmenverhalten an den Gittern ohne äußere Beschaltung untersucht; im zweiten Schritt erfolgt deren Beschaltung und die Analyse der Gesamtschaltung.

---

\*solyga@tetibm3.ee.tu-berlin.de

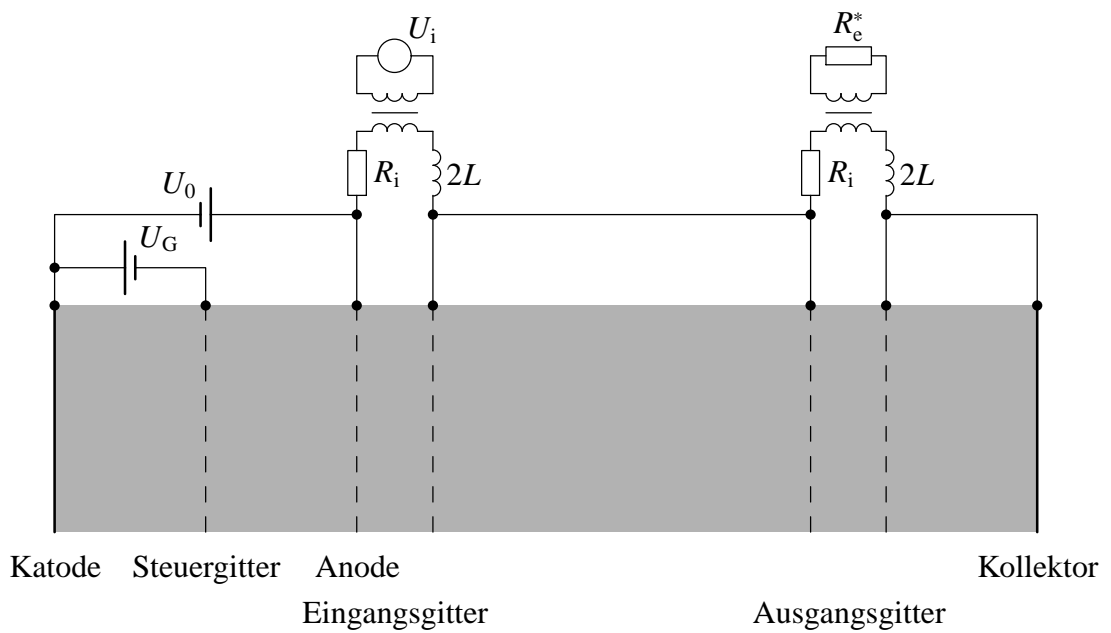


Abbildung 1: Eindimensionale Darstellung des konventionellen Verstärkerklystrons.

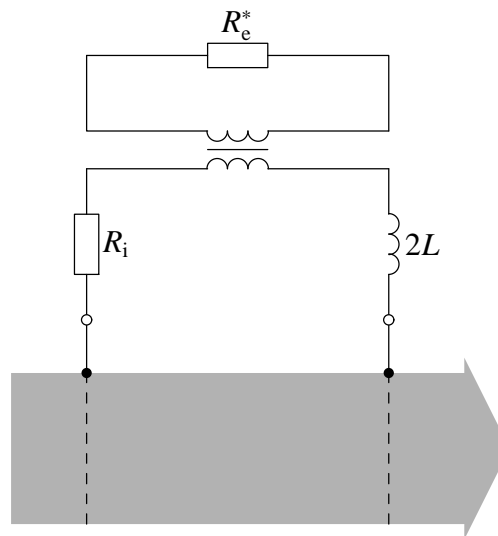


Abbildung 2: Eindimensionale Energieauskopplung. Anordnung zur Umwandlung der kinetischen Strahlleistung in elektrische Leistung.

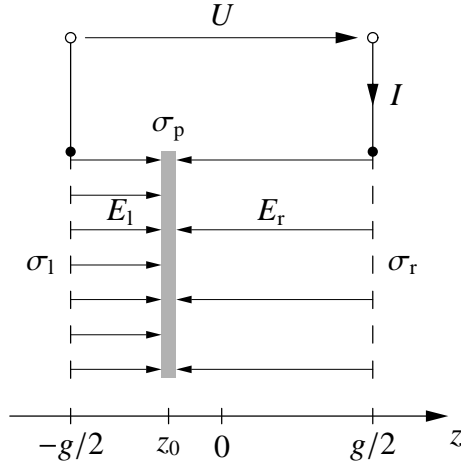


Abbildung 3: Eindimensionale Energieauskopplung. Influenzierung eines Klemmenstroms durch eine sich bewegende Flächenladung.

## 2 Klemmenverhalten ohne äußere Beschaltung

Betrachten wir zunächst einmal eine dünne Scheibe des Elektronenstrahls, welche sich – möglicherweise ungleichförmig – vom linken zum rechten Ausgangsgitter bewegt. Innerhalb der Scheibe sei die Raumladungsdichte  $\rho$  konstant, und ihre Dicke  $d$  sei klein im Vergleich zum Abstand  $g$  der Gitter, so daß sie durch eine Flächenladung  $\sigma_p = \rho d$  repräsentiert werden kann, Abbildung 3. Diese Ladungsscheibe influenziert auf den Gittern die Ladungsdichten  $\sigma_1$  und  $\sigma_r$ , und die MAXWELLSchen Gleichungen verlangen

$$\sigma_1 = \epsilon_0 E_1 \quad (1)$$

$$\sigma_r = \epsilon_0 E_r \quad (2)$$

$$-\sigma_p = \epsilon_0 (E_1 + E_r) = \sigma_1 + \sigma_r. \quad (3)$$

Für die am Gitter und somit an den Klemmen abfallende Spannung gilt

$$U = E_1(g/2 + z_0) - E_r(g/2 - z_0), \quad (4)$$

und für die Ladungsdichte auf dem rechten Gitter folgt

$$\sigma_r = -\frac{\epsilon_0 U + \sigma_p(g/2 + z_0)}{g}. \quad (5)$$

Offenbar ist diese Ladungsdichte von der Position  $z_0$  der Ladungsscheibe abhängig und damit zeitlich veränderlich, was nur durch einen Klemmenstrom  $I = A\dot{\sigma}_r = -A\dot{\sigma}_1$  erklärbar ist, worin  $A$  den zugrundegelegten Querschnitt der Anordnung bezeichnet

$$I = -\frac{\epsilon_0 A}{g} \dot{U} - \frac{1}{g} \sigma_p A \dot{z}_0. \quad (6)$$

Der Klemmenstrom setzt sich also aus zwei Teilströmen zusammen: Dem Ladestrom des durch die beiden Gitter gebildeten Plattenkondensators mit der Kapazität  $C = \epsilon_0 A/g$  aufgrund einer

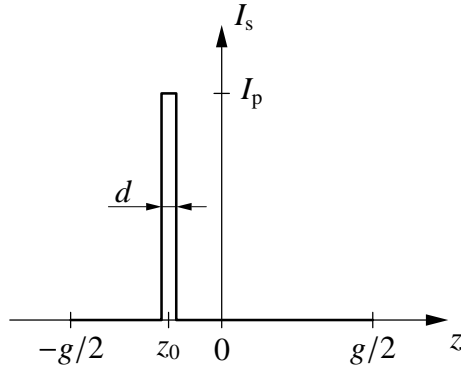


Abbildung 4: Eindimensionale Energieauskopplung. Durch eine sich bewegende plattenförmige Ladung homogener Dichte definierter Strahlstrom zu einem bestimmten Zeitpunkt.

Änderung der Klemmenspannung und einem Influenzstrom aufgrund der sich zwischen den Gittern mit der Geschwindigkeit  $v = \dot{z}_0$  bewegendem Ladung  $q = \sigma_p A$ . Sie läßt sich auch in der Form

$$I = -C\dot{U} - \frac{1}{g} qv \quad (7)$$

schreiben.<sup>1</sup> Da die Bewegung der Ladung nicht als gleichförmig vorausgesetzt wurde, gelten diese Gleichungen auch für zeitlich veränderliche und von der Klemmenspannung abhängige Geschwindigkeiten. Zu einer von Ladung und Geschwindigkeit befreiten Darstellung gelangt man durch die Definition des Strahlstroms  $I_s(z, t)$  als den zum Zeitpunkt  $t$  durch die Ebene  $z$  fließenden Konvektionsstrom. Im bisher betrachteten Fall der homogenen Plattenladung beträgt dieser  $I_p = \rho A v = qv/d$  innerhalb der Ladung – also im Bereich  $z \in [z_0 - d/2, z_0 + d/2]$  – und verschwindet sonst überall, Abbildung 4. Integriert man den Strahlstrom über den Bereich zwischen den Gittern, erhält man gerade  $qv$ . Definiert man weiterhin den örtlichen Mittelwert des Strahlstroms gemäß

$$\bar{I}_s(t) = \frac{1}{g} \int_{-g/2}^{g/2} I_s(z, t) dz, \quad (8)$$

so läßt sich (7) auch einfach schreiben als

$$I = -C\dot{U} - \bar{I}_s. \quad (9)$$

Obwohl die letzte Gleichung vom Aussehen her Allgemeingültigkeit beansprucht, wurde sie bisher nur für eine einzelne Plattenladung hergeleitet. Allerdings kann man zeigen, daß sich der bei mehreren bewegten Ladungen einstellende Influenzstrom in der Tat aus der Überlagerung

<sup>1</sup>Man kann zeigen, daß für eine sich mit der Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  bewegendem Punktladung  $q$  bei beliebig geformten Elektroden für den Influenzstrom gilt  $I = C\dot{U} + q\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}/U$ . Dabei bezeichnet  $\mathbf{E}$  das allein durch die Elektrodenspannung  $U$  hervorgerufene elektrische Feld am Ort der Punktladung. Das von der Elektrodenspannung unabhängige normierte Feld  $\mathbf{E}/U$  bezeichnet man auch als Feldformfaktor. Fällt er mit der Bewegungsrichtung der Ladung zusammen, genügt es, seinen Betrag zu betrachten. Im ebenen Falle beträgt dieser gerade  $1/g$ .

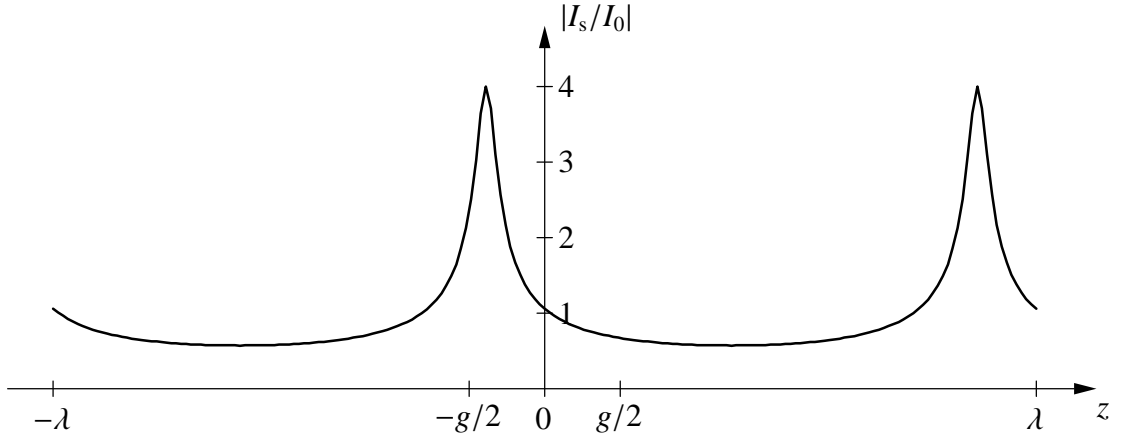


Abbildung 5: Aus der ballistischen Analyse ( $X_0 = 3/4$ ) und dem Modell des steifen Strahls gewonnener Strahlstrom zu einem gewissen Zeitpunkt.

der Teilströme ergibt. Damit ist auch im allgemeinen Fall der Influenzstrom betragsmäßig gleich dem über den Resonatorbereich gemittelten Strahlstrom, wobei das Vorzeichen im Sinne der Stromkontinuität zu wählen ist, und Gleichung 9 ist allgemein gültig.

Zur weiteren Auswertung wird nun das eingangs erwähnte Modell des steifen Strahls verwendet. Da sich alle Elektronen mit der konstanten Geschwindigkeit  $v_0$  in  $z$ -Richtung bewegen, ist einerseits der Strahlstrom bereits durch den Verlauf der Raumladungsdichte gegeben, und andererseits ist diese für alle Zeiten bekannt, wenn sie nur für einen bestimmten Zeitpunkt bekannt ist: Bezeichnet  $\rho_0(z)$  ihren Verlauf zum Zeitpunkt  $t = t_0$ , dann gilt  $\rho(z, t) = \rho_0[z - v_0(t - t_0)]$ . Die Raumladungsdichte ist folglich eine sich mit der Phasengeschwindigkeit  $v_0$  in  $z$ -Richtung ausbreitende Welle. Da ihre Anregung im Eingangsresonator periodisch mit der Kreisfrequenz  $\omega$  erfolgt ist, muß sie in der Zeit – und damit auch im Ort – periodisch sein. Mit der Wellenzahl des Strahls  $k = \omega/v_0$  folgt daraus eine Periodizität von  $2\pi$  in  $\omega t - kz$ , so daß der Strahlstrom schließlich als Summe von Kosinusfunktionen bzw. komplex als

$$I_s(z, t) = \sum_{i=0}^{\infty} I_{s,i} e^{j\psi_i} e^{j\omega t} e^{-jkz} \quad (10)$$

dargestellt werden kann. Analog läßt sich die Wellendarstellung des Strahlstroms gewinnen, wenn er nur an einem Ort, dafür aber für alle Zeiten bekannt ist.

Zur Veranschaulichung dieser Zusammenhänge ist in Abbildung 5 das Stromprofil eines realistischen dichtemodulierten Elektronenstrahls dargestellt, welches aus der ballistischen Analyse stammt. Die Parameter dieses Stroms gemäß (10) lauten  $I_{s,0} = -I_0$ ,  $I_{s,i} = -2I_0 J_i(i3/4)$  und  $\psi_i = 3/4$ .

Die Darstellung des Strahlstroms läßt sich weiter vereinfachen, wenn man bereits an dieser Stelle berücksichtigt, daß die Energieauskopplung mittels einer stark resonanten Anordnung erfolgen wird. Um eine hohe, die Elektronen abbremsende Feldstärke zu erhalten, muß die Resonanzfrequenz der Auskoppelinrichtung sehr dicht bei einer der im Strahl „enthaltenen“ Frequenzen  $i\omega$  liegen. Im allgemeinen wird keine Frequenzvervielfachung gewünscht, so daß die Auskoppelinrichtung bei  $\omega$  ihre Resonanz haben wird. Eine hohe Güte vorausgesetzt, sind damit nur noch die ersten beiden Glieder der Reihe aus (10) interessant. Bei Vernachlässigung der Phase – diese kann bei Bedarf im Nachhinein wieder eingebracht werden – hat man daher

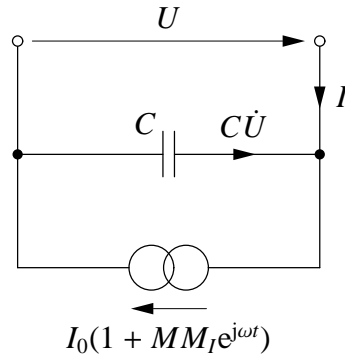


Abbildung 6: Ersatzschaltung für die Anordnung bestehend aus moduliertem Elektronenstrahl und Gitterpaar.

als allgemeine Darstellung des Strahlstroms

$$I_s(z, t) = -I_0 \left( 1 + M_I e^{j(\omega t - kz)} \right), \quad (11)$$

worin  $I_0$  den – der Konvention folgend – positiven Strahlgleichstrom und  $M_I \in [0, 2]$  die positive und reelle Strommodulation bezeichnet. Wie auch bisher wird der Strahlstrom positiv in  $z$ -Richtung gezählt. Für seinen örtlichen Mittelwert innerhalb des Gitterpaares erhält man gemäß Gleichung (8)

$$\bar{I}_s(t) = -I_0 \left( 1 + MM_I e^{j\omega t} \right) \quad (12)$$

mit dem bereits von der Analyse der Geschwindigkeitsmodulation bekannten Strahl-Resonator-Kopplungskoeffizienten

$$M = \frac{\sin kg/2}{kg/2}. \quad (13)$$

Mit der Gleichung für den Klemmenstrom (9) ist damit das Klemmenverhalten der Anordnung aus Abbildung 2 ohne äußere Beschaltung bekannt: Bei gegebenem Gitter und Strahl gilt für den Zusammenhang zwischen Klemmenspannung und Klemmenstrom

$$I = -C\dot{U} + I_0 \left( 1 + MM_I e^{j\omega t} \right), \quad (14)$$

woraus sich die in Abbildung 6 dargestellte Ersatzschaltung ergibt.

### 3 Verhalten der Gesamtschaltung

Die äußere Beschaltung des Gitterpaares soll nun derart erfolgen, daß die an eine ohmsche Last abgegebene HF-Leistung so groß wie möglich wird. Da bei galvanischer Ankopplung der Last keine Anpassung des Lastwiderstandes an den Strahl möglich ist, empfiehlt sich eine Transformatorkopplung. Außerdem sollte sie resonant ausgelegt sein, um einerseits den Strahl maximal belasten und andererseits die stets im Strahl vorhandenen und bei normalem Betrieb nicht zu vernachlässigenden höheren Harmonischen von der Last weitgehend fernhalten zu können. Da

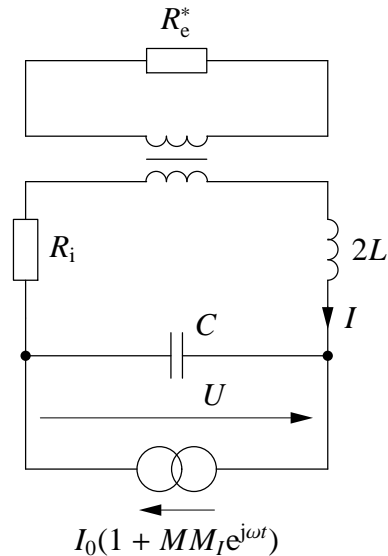


Abbildung 7: Ersatzschaltung für die resonante transformatorgekoppelte Auskoppelinrichtung aus Abbildung 2.

ein Parallelschwingkreis wegen des Verschwindens seiner Impedanz bei Resonanz nicht in Frage kommt, muß ein Reihenschwingkreis verwendet werden, womit sich die in Abbildung 7 dargestellte Ersatzschaltung ergibt. Der Widerstand  $R_i$  repräsentiert die Verluste im Primärkreis, also im wesentlichen die Kupferwiderstände der beiden Spulen, und  $R_e^*$  stellt die eigentliche Last dar.

Die Analyse vereinfachte sich weiter, wenn man sich auf die Hochfrequenzanteile der Ströme und Spannungen beschränken könnte. Momentan enthält die Rechnung jedoch noch den Strahlgleichstrom  $I_0$ , welcher eine eventuell nicht vernachlässigbar geringe Verlustleistung in den realen Spulen – in der Ersatzschaltung also in  $R_i$  – hervorruft. Zur Klärung der Bedeutung dieses Gleichstromes betrachte man noch einmal das gesamte Klystron aus Abbildung 1 und stelle dieselben Überlegungen bezüglich des influenzierten Stroms für das Elektrodenpaar zweites Ausgangsgitter und Kollektor an. Offenbar muß der Gleichstrom einerseits von außen auf den Kollektor fließen, und zum anderen muß er vom zweiten Ausgangsgitter nach außen fließen. Die bisherige Rechnung ergab aber, daß derselbe Gleichstrom von außen auf das Gitter fließt, siehe Abbildung 3. In der Summe passiert folglich *kein* Gleichstrom die Klemme des zweiten Ausgangsgitters. Das ist auch einleuchtend, denn pro Periode fliegen dieselbe Anzahl von Elektronen auf das Gitter zu, wie auch von ihm weg. Analoge Überlegungen für alle anderen Gitter liefern dasselbe Ergebnis. Die einzigen Klemmen, die tatsächlich einen Gleichstrom – nämlich  $I_0$  – führen, sind jene von Katode und Kollektor.<sup>2</sup> Damit gibt es keinen Grund, den Strahlgleichstrom tatsächlich durch die Primärkreise fließen zu lassen, wie es bei einer Beschaltung gemäß Abbildung 1 der Fall wäre. Mit der Konsequenz, daß die statischen Potentiale der Gitter durch den Strahl bestimmt wären, könnte man den Kollektor direkt mit der Spannungsquelle verbinden, und die Primärkreise wären gleichstromfrei.<sup>3</sup>

<sup>2</sup>Dies gilt natürlich nur unter der eingangs getätigten Annahme, daß keine Elektronen von den Gittern eingefangen werden.

<sup>3</sup>In der Praxis stellt sich das Problem des Gleichstroms ohnehin in anderer Weise, da die Sektion Eingangsresonator, Driftraum, Ausgangsresonator üblicherweise aus einem Stück Kupfer gebaut wird.



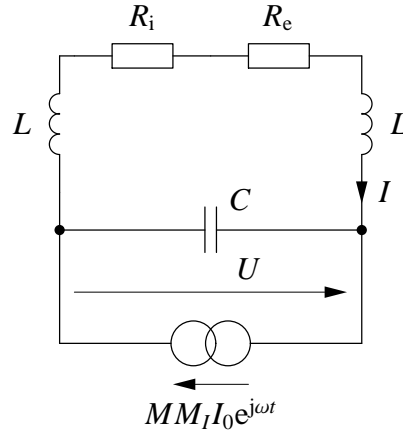


Abbildung 8: Hochfrequenzersatzschaltung für die resonante Auskoppelinrichtung. Der Lastwiderstand wurde in den Primärkreis transformiert.

Der Strahlgleichstrom kann also ohne Bedenken in der weiteren Rechnung ignoriert werden. Dies hat gleichzeitig die angenehme Konsequenz, daß der eigentliche Lastwiderstand  $R_e^*$  einfach in den Primärkreis transformiert werden kann. Unter der Annahme eines idealen Transformators mit dem Übertragungsverhältnis  $\nu$  erscheint er dort ebenfalls als ohmscher Widerstand  $R_e = \nu R_e^*$ , und man erhält die in Abbildung 8 dargestellte Ersatzschaltung. Diese sei nun vor allem hinsichtlich der umgesetzten Leistungen untersucht.

Da die hier durchgeführte eindimensionale Analyse als Näherung für den dreidimensionalen Fall dienen soll, ist es sinnvoll, schnell von den konzentrierten Elementen Widerstand, Induktivität und Kapazität wegzukommen und stattdessen die in der Mikrowellentechnik gebräuchlichen Größen Resonanzfrequenz, Güte und Shuntwiderstand zu verwenden. Zu diesem Zweck wird die Differentialgleichung für den Klemmenstrom  $I$  aus Abbildung 8

$$\ddot{I} + \frac{R}{2L}\dot{I} + \frac{1}{2LC}I = \frac{1}{2LC}MM_I I_0 e^{j\omega t} \quad (15)$$

mit der allgemeinen Form der Schwingungsdifferentialgleichung

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 y \quad (16)$$

verglichen, und man erhält für die Dämpfung  $\delta$ , die Resonanzfrequenz  $\omega_0$  und die Güte  $Q$

$$2\delta = \frac{R}{2L} \quad (17)$$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{2LC} \quad (18)$$

$$Q = \frac{\omega_0}{2\delta}. \quad (19)$$

Hier wurde  $R = R_i + R_e$  gesetzt, weshalb  $\delta$  und  $Q$  die *belastete* Dämpfung bzw. Güte des Kreises angeben. Betrachtet man – wie in der Mikrowellentechnik üblich – die *internen* Größen  $\delta_i$ ,  $Q_i$  (externe Last verschwindet,  $R_e = 0$ ) und die *externen* Größen  $\delta_e$ ,  $Q_e$  (interne Last verschwindet,

$R_i = 0$ ), so gilt für diese

$$2\delta_i = \frac{R_i}{2L} \quad 2\delta_e = \frac{R_e}{2L} \quad (20)$$

$$Q_i = \frac{\omega_0}{2\delta_i} \quad Q_e = \frac{\omega_0}{2\delta_e} \quad (21)$$

mit den leicht zu verifizierenden Zusammenhängen

$$\delta = \delta_i + \delta_e \quad (22)$$

$$\frac{1}{Q} = \frac{1}{Q_i} + \frac{1}{Q_e} \quad (23)$$

$$RQ = R_i Q_i = R_e Q_e. \quad (24)$$

Für die Amplituden der Klemmengrößen  $I = \hat{I}e^{j\omega t}$  und  $U = \hat{U}e^{j\omega t}$  erhält man bei Verwendung der Verstimmung  $v = \omega/\omega_0 - \omega_0/\omega$

$$\hat{I} = -jQ \frac{\omega_0}{\omega} \frac{1}{1 + jQv} MM_I I_0 \quad (25)$$

$$\hat{U} = \left( Q^2 \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \frac{1}{1 + jQv} - jQ \frac{\omega_0}{\omega} \right) RMM_I I_0 \quad (26)$$

und bei Resonanz mit  $\omega = \omega_0$  – dies wird im folgenden stets vorausgesetzt –

$$\hat{I} = -jQMM_I I_0 \quad (27)$$

$$\hat{U} = (Q^2 - jQ)RMM_I I_0, \quad (28)$$

woraus für die vom Strahl gelieferte und in der Last umgesetzte zeitlich gemittelte Wirkleistung folgt

$$P = \frac{Q^2 M^2 R}{2} (M_I I_0)^2. \quad (29)$$

Für die interne und die externe Leistung gilt

$$P_i = \frac{Q^2 M^2 R_i}{2} (M_I I_0)^2 \quad P_e = \frac{Q^2 M^2 R_e}{2} (M_I I_0)^2. \quad (30)$$

Von den konzentrierten Elementen sind noch immer die Widerstände in der Rechnung verblieben, welche nun durch die allgemeineren *Shuntwiderstände* ersetzt werden sollen. Der (belastete) Shuntwiderstand eines Resonators ist definiert als

$$R_{sh} = \frac{|\hat{U}_r|^2}{2P}, \quad (31)$$

worin  $P$  die gesamte im Resonator umgesetzte Wirkleistung und  $\hat{U}_r$  die Amplitude der wie folgt definierten Resonatorspannung bezeichnen:<sup>4</sup> Man wähle einen geradlinigen Pfad durch den Resonator, der parallel zu (einer) seiner Symmetrieachse(n) verläuft und prinzipiell als Trajektorie

<sup>4</sup>In der Literatur findet man unterschiedliche Definitionen des Shuntwiderstandes bzw. der Shuntimpedanz. Eine ausführlichere Diskussion der Vor- und Nachteile einzelner Definitionen würde den Rahmen dieser Arbeit sprengen.

eines Strahlelektrons in Frage kommt. Ein sich mit der Strahlgeschwindigkeit  $v_0$  auf diesem Pfad bewegendes Probeteilchen möge das gesamte Eigenfeld des Resonators durchqueren. Die dabei von ihm durchlaufene Spannung ist die Resonatorspannung  $U_r$ . Im hier betrachteten Fall erfüllt die  $z$ -Achse die an den Pfad gestellten Forderungen, und das Probeteilchen möge sich zum Zeitpunkt  $t = t_0$  in  $z = 0$  befinden, also in der Mitte zwischen den Gittern, so daß seine Trajektorie durch  $z = v_0(t - t_0)$  gegeben ist. Das Resonatorfeld ergibt sich aus der Klemmenspannung  $U$  und dem Gitterabstand  $g$  zu

$$E = \frac{\hat{U}}{g} e^{j\omega t}, \quad (32)$$

so daß sich für die vom Probeteilchen durchlaufene Spannung

$$U_r = \frac{\hat{U}}{g} e^{j\omega t_0} \int_{-g/2}^{g/2} e^{j\omega z/v_0} dz \quad (33)$$

ergibt. Die Amplitude dieser Schwingung beträgt

$$\hat{U}_r = M\hat{U}, \quad (34)$$

ist also gleich der mit dem Strahl-Resonator-Kopplungskoeffizienten reduzierten Klemmenspannung und kann unter Beachtung von (28) und  $Q \gg 1$  als

$$\hat{U}_r = Q^2 M^2 R M_I I_0 \quad (35)$$

dargestellt werden. Damit folgt für den Shuntwiderstand

$$R_{sh} = Q^2 M^2 R, \quad (36)$$

und für Resonatorspannung und umgesetzte Leistung erhält man die einfachen Ausdrücke

$$\hat{U}_r = R_{sh} M_I I_0 \quad (37)$$

$$P = \frac{R_{sh}}{2} (M_I I_0)^2. \quad (38)$$

Den internen und den externen Shuntwiderstand definiert man analog zu (31) als

$$R_{shi} = \frac{|\hat{U}_r|^2}{2P_i} \quad R_{she} = \frac{|\hat{U}_r|^2}{2P_e}, \quad (39)$$

woraus mit (24) folgt

$$R_{shi} = Q_i^2 M^2 R_i \quad R_{she} = Q_e^2 M^2 R_e, \quad (40)$$

und es gelten die Zusammenhänge

$$\frac{1}{R_{sh}} = \frac{1}{R_{shi}} + \frac{1}{R_{she}} \quad (41)$$

$$\frac{R_{sh}}{Q} = \frac{R_{shi}}{Q_i} = \frac{R_{she}}{Q_e}. \quad (42)$$

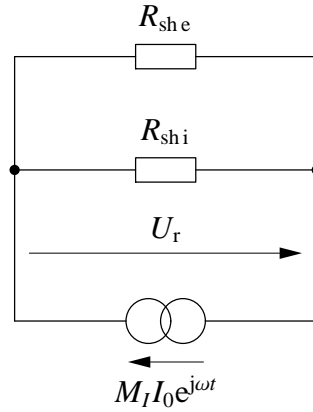


Abbildung 9: Ersatzschaltung für einen strahlstromgetriebenen belasteten Ausgangsresonator hoher Güte bei Resonanz.

Für die Leistungen folgt aus (30) mit (24)

$$P_i = \frac{P}{1 + Q_i/Q_e} \quad P_e = \frac{P}{1 + Q_e/Q_i}. \quad (43)$$

Es sei darauf hingewiesen, daß sich die internen und externen Shuntwiderstände nicht – wie ein erster Blick auf (40) nahelegt – proportional sondern umgekehrt proportional zu den entsprechenden konzentrierten Widerständen verhalten, denn es gilt  $Q_{i/e} = 2L\omega_0/R_{i/e}$ . Eine verschwindende externe Last wird daher durch  $R_e = 0$  oder  $R_{sh e} \rightarrow \infty$  repräsentiert.

Damit ergibt sich eine in ihrer Einfachheit wohl unschlagbare Ersatzschaltung für den Ausgangskreis bei Resonanz, Abbildung 9. Der von der Stromquelle gelieferte Strom ist nun nicht mehr laufzeitreduziert; es handelt sich genau um die Grundwelle des modulierten Strahls. Genauso ist die über der Stromquelle abfallende Spannung die vom Strahl durchlaufene und nicht mehr die Klemmenspannung, wie es in den vorherigen Ersatzschaltbildern der Fall war. Die Strahl-Resonator-Kopplungskoeffizienten von Strom und Spannung stecken vollständig in den Shuntwiderständen. Mithin sind diese im Gegensatz zu den konzentrierten Widerständen Parameter von Resonator *und* Strahl, nicht mehr nur vom Resonator allein. Der belastete Shuntwiderstand ist der Widerstand, der dem Strahl vom Resonator entgegengesetzt wird, gewissermaßen die Last des Strahls. Ist der Laufwinkel der Elektronen im Resonator klein, so ist der dem Strahl entgegengesetzte Widerstand groß. Bei Laufwinkeln von mehr als  $360^\circ$  wird der Widerstand vernachlässigbar gering.

Die bisherige Analyse ist aufgrund der allgemeingehaltenen Strahlstromverteilungen wenig eingängig. Besser vorstellbar hingegen sind die Vorgänge im Falle eines optimal gebündelten Elektronenstrahls, welcher im folgenden diskutiert werden und der Verifikation dienen soll. Wird die gesamte sich in einem Strahlabschnitt der Periodenlänge  $\lambda = v_0 T$  befindende Ladung  $q = -I_0 T$  auf einen kleinen Bereich  $d \ll \lambda$  gleichmäßig zusammengedrängt, so hat man den eingangs behandelten Fall der Plattenladung, siehe Abbildung 4, Seite 5 – nun jedoch in periodischer Form. Aufgrund der pro Periodenlänge erhaltenen Ladung beträgt der Strahlstrom  $I_p = qv_0/d = -I_0 \lambda/d$  innerhalb einer Platte und verschwindet in den Zwischenräumen. Die Aufenthaltszeit einer Ladungsplatte im Bereich zwischen den Gittern (Laufzeit) beträgt  $\tau = g/v_0$ . Während dieser Zeit hat man einen Influenzstrom von  $qv_0/g = -I_0 \lambda/g = -I_0 T/\tau$  (siehe Gleichung (7)), währenddessen er in der verbleibenden Zeitspanne  $T - \tau$  verschwindet, Abbildung 10. Bei Vernachlässigung der Phase erhält man für diesen Strom mittels FOURIER-Entwicklung

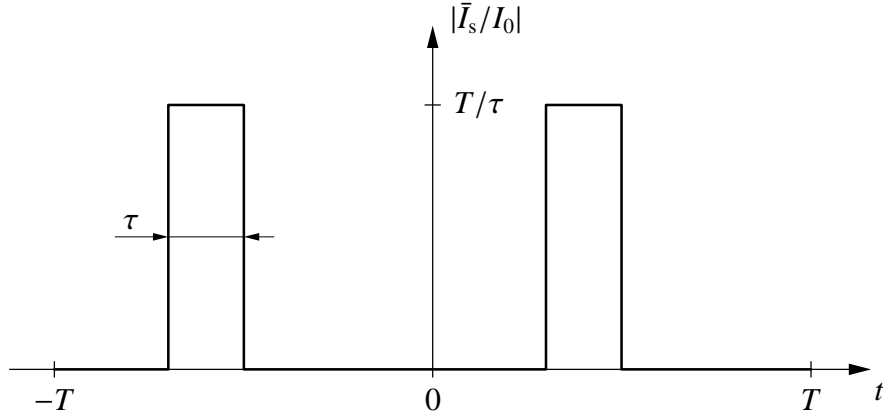


Abbildung 10: Influenz- bzw. örtlich gemittelter Strahlstrom eines optimal modulierten steifen Elektronenstrahls.

$$\bar{I}_s = -I_0 \left( 1 + 2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sin ikg/2}{ikg/2} e^{j\omega t} \right), \quad (44)$$

worin  $k = 2\pi/\lambda$  wie bisher die Wellenzahl des modulierten Strahls bezeichnet. Werden aus den bereits bekannten Gründen die höheren Harmonischen vernachlässigt, gilt für den Klemmenstrom also

$$I = -C\dot{U} + I_0(1 + 2Me^{j\omega t}). \quad (45)$$

Dies ist aber gerade Gleichung (14) für  $M_I = 2$ . Dann muß bei derselben äußeren Beschaltung der Gitter das Ergebnis der allgemeinen Schaltungsanalyse gelten, d.h. für hohe Güten und Anregung auf der Resonanzfrequenz gilt für die Klemmenspannung gemäß Gleichung (28)

$$\hat{U} = 2Q^2 R M I_0. \quad (46)$$

Die Phase des elektrischen Feldes zwischen den Gittern wird sich bei Resonanz derart einstellen, daß jeder Ladung die maximale Energie entzogen wird. Dies war auch das Ergebnis der früheren Rechnung; die Klemmenspannung besaß bei Resonanz dieselbe Phase wie die Grundwelle des Strahlstroms. Mithin durchläuft jede Ladungsplatte die mit dem Strahl-Resonator-Kopplungskoeffizienten reduzierte Klemmenspannung

$$U_d = M\hat{U}. \quad (47)$$

Die jeder Ladungsplatte entzogene kinetische Energie beträgt folglich  $-qU_d = I_0 U_d T$ , und die vom Strahl gelieferte mittlere Leistung  $I_0 U_d$ ,

$$P = 2Q^2 R (M I_0)^2. \quad (48)$$

Wie es sein muß, ergibt sich dieselbe vom Strahl gelieferte, in der ohmschen Last umgesetzte Leistung wie bei der früheren Rechnung. Würde die Grundwelle des Strahlstroms direkt durch einen Widerstand  $R_r$  fließen, so würde er die Leistung  $(2I_0)^2 R_r / 2$  umsetzen. Man kann also einen virtuellen Resonatorwiderstand mit der bekannten Leistung aus (48) gemäß  $P = (2I_0)^2 R_r / 2$  definieren und ihn *Shuntwiderstand* taufen. Für ihn gilt dann

$$R_{sh} = Q^2 M^2 R, \quad (49)$$

was ebenfalls der ehemaligen Definition entspricht, siehe Gleichung (36). Daß der Strahl-Resonator-Kopplungskoeffizient quadratisch in die vom Strahl gelieferte Leistung und damit auch quadratisch in den Shuntwiderstand eingeht, liegt daran, daß sowohl der Strahlstrom als auch die Klemmenspannung bei der Analyse reduziert werden mußten. Obwohl beide Reduktionen von derselben Größe sind, besitzen sie verschiedene physikalische Hintergründe: Die Laufzeitreduktion des Strahlstroms ergibt sich durch die integrierende Wirkung der Gitter (örtlicher Mittelwert), welche den ursprünglich schmalen Stromimpuls der relativen Breite  $d/\lambda$  auf den Betrag  $g/\lambda$  aufweiten und seine Höhe reziprok verringern. Die Laufzeitreduktion der Klemmenspannung hingegen trägt der sich während des Passierens der Ladung ändernden Resonatorfeldstärke Rechnung.

## 4 Der Effekt der Strahlsättigung

Es soll nun ein Effekt diskutiert werden, der mit der Annahme einer konstanten Elektronengeschwindigkeit vernachlässigt wurde: Die *Begrenzung der Resonatorspannung* aufgrund der *Strahlsättigung*. Jedes Elektron kann an das Feld im Ausgangsresonator maximal soviel Energie abgeben, wie es in Form von kinetischer Energie besitzt. Hat es seine gesamte Energie abgegeben und befindet sich noch immer im Resonatorfeld, so wird es wieder Energie aufnehmen. Man nennt einen Elektronenstrahl durch das Resonatorfeld *gesättigt*, wenn die ersten seiner Elektronen ihre gesamte Energie an das Feld abgeben und am Resonatorausgang zum Stehen kommen. Solange die Resonatorfeldstärke gering ist, wird bei gegebenem Strahl eine Vergrößerung des Shuntwiderstandes eine Erhöhung der Resonatorspannung nach sich ziehen. Ist der Shuntwiderstand so groß, daß Sättigung einsetzt, wird seine weitere Vergrößerung jedoch nicht mehr zur Zunahme der Resonatorspannung führen, denn die die Sättigung einläutenden Elektronen entziehen dem Resonator bereits wieder Energie und tragen daher nicht mehr zum Feldaufbau bei. Die Begrenzung der Resonatorspannung ist somit eine direkte Folge der Strahlsättigung; sie erklärt sich aus dem Energiehaushalt einzelner (nämlich der am stärksten abgebremsten) Elektronen. Der mittlere Energiehaushalt von Strahl und Resonator ist für den Sättigungseffekt nicht von Belang.<sup>5</sup>

Es ist bereits an dieser Stelle offensichtlich, daß ein Klystron mit einem gesättigten Strahl arbeiten muß, um hohe Wirkungsgrade erzielen zu können, denn bei ungesättigtem Strahl gibt kein einziges Elektron seine gesamte kinetische Energie an das Resonatorfeld ab. Der Sättigungsfall muß folglich – wenigstens als Grenzfall – in der hier vorgestellten Analyse enthalten sein. Unter Beibehaltung des Modells des steifen Strahls sei der Sättigungseffekt wie folgt idealisiert: Die Sättigung setzt schlagartig ein; bei gegebenem Strahl gilt weiterhin  $U_r \propto R_{sh}$  bis die Sättigungsspannung  $U_{r,sat}$  erreicht ist. Größere Shuntwiderstände sind nicht erlaubt. Für die Trajektorien der Elektronen gelte mit dieser Vorstellung vereinbar: Bis zur Sättigung passieren alle Elektronen den Resonator mit konstanter Geschwindigkeit und verlassen ihn mit einer Geschwindigkeit  $> 0$ , welche sich aus ihrer Restenergie ergibt. Im Grenzfall der Sättigung passieren weiterhin alle Elektronen den Resonator mit konstanter Geschwindigkeit; die die Sättigung

<sup>5</sup>Eine obere Grenze für die Resonatorspannung kann man unter Verwendung des mittleren Energieumsatzes aus dem Energieerhaltungssatz gewinnen:

$$P = R_{sh}(M_I I_0)^2 / 2 = U_r M_I I_0 / 2 \leq P_0 = U_0 I_0 \Rightarrow U_r \leq 2U_0 / M_I.$$

Diese Abschätzung ist offenbar zu grob. Für einen unmodulierten Strahl hätte man die triviale Aussage: „Die Resonatorspannung muß kleiner als unendlich sein.“

einläutenden Elektronen kommen jedoch am Resonatorausgang schlagartig zum Stehen; eine Reflexion von Elektronen im Resonatorfeld ist damit nicht möglich.<sup>6</sup>

Mit diesem Modell läßt sich nun die Sättigungsspannung des Resonators leicht angeben: Die kinetische Energie der Elektronen beträgt am Eingang des Resonators mit guter Näherung  $eU_0$ , worin  $U_0$  wieder die Anodenspannung der Elektronenkanone bezeichnet. Unter Vernachlässigung der Emissionsenergie auf der Katode folgt dies aus der feldtheoretischen Analyse der Dichtemodulation sofort ( $v(\lambda_p/4) = v_0$ ) und aus der ballistischen Analyse bei Vernachlässigung der Geschwindigkeits- gegenüber der Strommodulation ( $M_v \ll M_I \leq 2$ ). Dann kann jedes Elektron maximal gegen eine Spannung  $U_0$  im Ausgangsresonator anlaufen, d.h. es gilt<sup>7</sup>

$$\hat{U}_r \leq \hat{U}_{r\text{sat}} = U_0. \quad (50)$$

Es sei nocheinmal darauf hingewiesen, daß die Resonatorspannung aufgrund ihrer in dieser Arbeit gewählten Definition und dem oben besprochenen Modell der konstanten Elektronengeschwindigkeit mit der von den Strahlelektronen durchlaufenen Spannung identisch ist, d.h. es gilt  $U_r = U_d$ . Diese Größe wurde weiter oben bereits verwendet.

Dem erweiterten Modell zufolge kann der Betriebsmodus der Auskoppelinrichtung stets einem der beiden Bereiche *linearer Betrieb* und *Stättigungsbetrieb* zugeordnet werden: Solange  $U_r \propto R_{\text{sh}}$  gilt, liegt linearer Betrieb vor und für größere Shuntwiderstände Stättigungsbetrieb. Im Grenzfall  $\hat{U}_{r\text{sat}} = M_I I_0 R_{\text{sh}}$ , dem *Betrieb auf der Sättigungsgrenze*, ist der Shuntwiderstand gerade groß genug, um Sättigung zu erreichen; dieser Betriebsmodus kann beiden Bereichen zugeordnet werden. Mit dem als

$$R_{\text{krit}} = \frac{\hat{U}_{r\text{sat}}}{M_I I_0} = \frac{R_0}{M_I} \quad (51)$$

definierten *kritischen Widerstand* –  $R_0 = U_0/I_0$  ist der Gleichstromwiderstand des Elektronenstrahls – hat man einen reinen Strahlparameter, mit dessen Hilfe der Betriebsmodus leicht angegeben werden kann: Bei  $R_{\text{sh}} \leq R_{\text{krit}}$  liegt linearer Betrieb vor, bei  $R_{\text{sh}} \geq R_{\text{krit}}$  Stättigungsbetrieb, und bei  $R_{\text{sh}} = R_{\text{krit}}$  arbeitet man auf der Sättigungsgrenze. Die in dieser Arbeit vorgestellte Analyse ist also nur für  $R_{\text{sh}} \leq R_{\text{krit}}$  gültig.

## 5 Leistungsbilanz

Es wird nun untersucht, wie bei gegebenem Strahl die Shuntwiderstände und Güten zu wählen sind, um aus der eingespeisten Gleichstromleistung  $P_0 = U_0 I_0$  die größtmögliche Hochfrequenzleistung  $P_e$  in der externen Last  $R_{\text{sh}e}$  zu gewinnen. Dazu wird die letztendlich zu maximierende *Haupteffektivität*

$$\eta = \frac{P_e}{P_0} \quad (52)$$

<sup>6</sup>Würde man unter denselben Annahmen größere Shuntwiderstände zulassen, verließen in der Tat nicht mehr alle Elektronen den Resonator auf die übliche Weise. Eine auf diesen Bereich ausgedehnte lineare Theorie wäre in höchstem Grade inkonsistent.

<sup>7</sup>Hingegen kann die weiter vorn betrachtete Klemmenspannung sehr wohl die Strahlgleichspannung übersteigen; wegen (34) gilt für sie  $\hat{U} \leq U_0/M$ .

in die beiden Teileffektivitäten,  $\eta_w$  und  $\eta_k$ , die *Wandlungs-* und *Kreiseffektivität* zerlegt

$$\eta_w = \frac{P}{P_0} \quad (53)$$

$$\eta_k = \frac{P_e}{P}. \quad (54)$$

Die Wandlungseffektivität ist ein Maß für die Güte der Umwandlung der der Elektronenkanone zugeführten Gleichstromleistung in Mikrowellenleistung. Die Kreiseffektivität gibt an, welcher Anteil dieser Mikrowellenleistung an die externe Last – den eigentlichen Verbraucher – abgegeben wird. Zur Auffindung optimaler Lastbedingungen ist es zweckmäßig, Strahl und unbelasteten Resonator als gegeben zu betrachten und die externe Last gedanklich zu variieren. Für jeden Lastfall wird sich ein gewisser Bruchteil der Sättigungsspannung am Resonator einstellen, d.h. in Abhängigkeit von der externen Last wird sich ein gewisser *Sättigungsgrad*

$$\delta = \frac{\hat{U}_r}{\hat{U}_{r \text{ sat}}} = M_I \frac{R_{\text{sh}}}{R_0} = \frac{R_{\text{sh}}}{R_{\text{krit}}} \quad (55)$$

einstellen, wobei nur Werte aus dem Intervall  $[0, 1]$  zulässig sind. Offenbar läßt sich der Strahl nicht immer durch eine passende Wahl der externen Last sättigen: Da die externe Last den Shuntwiderstand verringert, ist Sättigung nur dann erreichbar, wenn sie auch gänzlich ohne externe Belastung erreichbar ist. Die Anordnung Strahl + unbelasteter Resonator ist nur dann für Sättigungsbetrieb geeignet, wenn der interne Shuntwiderstand nicht kleiner als der kritische Widerstand ist, d.h. wenn der als

$$\theta = \frac{R_{\text{shi}}}{R_{\text{krit}}} = M_I \frac{R_{\text{shi}}}{R_0} \quad (56)$$

definierte *potentielle Sättigungsgrad* größer oder gleich eins ist. Im Gegensatz zum Sättigungsgrad ist der potentielle Sättigungsgrad lastunabhängig; es ist ein Parameter von Strahl und unbelastetem Resonator. Der mit der aktuellen externen Last tatsächlich realisierte Bruchteil des potentiellen Sättigungsgrades ist offenbar durch das Verhältnis zwischen belastetem und internem Shuntwiderstand gegeben. Unter Verwendung der Beziehungen (42) und (23) erhält man daher

$$\delta = \theta \frac{R_{\text{sh}}}{R_{\text{shi}}} = \frac{\theta}{1 + Q_i/Q_e}. \quad (57)$$

Für die Wirkungsgrade folgt schließlich<sup>8</sup>

$$\eta_w = \frac{M_I^2 R_{\text{sh}}}{2 R_0} = \frac{M_I}{2} \delta \quad (58)$$

$$\eta_k = \frac{R_{\text{sh}}}{R_{\text{she}}} = \frac{1}{1 + Q_e/Q_i} = 1 - \frac{\delta}{\theta} \quad (59)$$

$$\eta = \frac{M_I}{2} \delta \left(1 - \frac{\delta}{\theta}\right). \quad (60)$$

<sup>8</sup>Wegen  $\delta \leq 1$  und  $\eta_w \leq 1$  liefert (58)  $M_I \leq 2$ . Die Strommodulation kann also schon aus energetischen Gründen niemals größer als zwei sein.



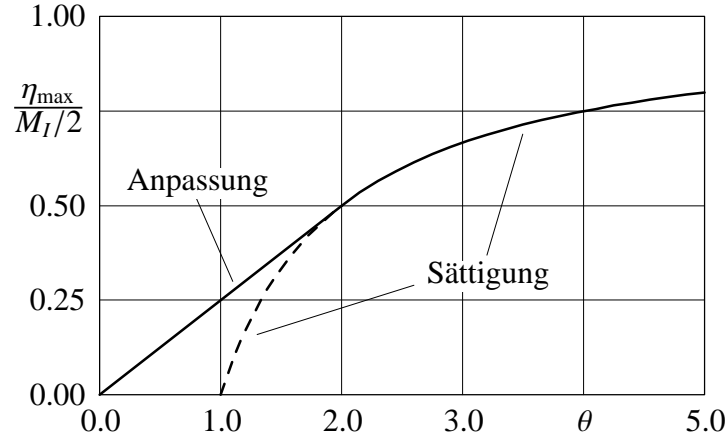


Abbildung 11: Maximaler Wirkungsgrad (bei optimaler externer Belastung) als Funktion des potentiellen Sättigungsgrades. Für  $1 \leq \theta \leq 2$  ist zusätzlich der Wirkungsgrad bei Sättigungsbetrieb dargestellt (gestrichelte Linie).

Um dem Strahl möglichst viel seiner kinetischen Energie zu entziehen, ist daher zunächst einmal Sättigungsbetrieb ( $\delta = 1$ ) zu fordern. Die Strommodulation des Strahls sollte so groß wie möglich sein; im optimalen Falle besteht der Strahl aus extrem schmalen Impulsen ( $M_I = 2$ ). Nur dann wird eine vollständige Wandlung von kinetischer Strahl- in Hochfrequenzenergie möglich.<sup>9</sup> Um nun auch möglichst die gesamte Feldenergie an die externe Last weiterzureichen, muß der potentielle Sättigungsgrad groß gegenüber dem tatsächlichen sein. Da letzterer den Wert 1 annehmen soll, ist schließlich  $\theta \gg 1$  zu fordern, d.h. der unbelastete Shuntwiderstand sollte wesentlich größer als der Strahlwiderstand sein.

Die Zusammenhänge seien nun quantitativ betrachtet. Der Hauptwirkungsgrad (60) besitzt für  $\delta = \theta/2$  ein relatives und absolutes Maximum von  $M_I\theta/8$ , das für  $R_{sh} = R_{sh_i}/2$  bzw.  $Q_e = Q_i$ , also bei *Anpassung* angenommen wird, wie es aus der Leistungselektrotechnik bekannt ist. Dieses Maximum kann wegen der Begrenzung  $\delta \leq 1$  jedoch nur im Falle von  $\theta \leq 2$  eingestellt werden. Für höhere potentielle Sättigungsgrade ist vermöge der externen Last  $\delta = 1$  einzustellen, d.h. sie ist wegen (57) zu  $Q_e = Q_i/(\theta - 1)$  zu wählen. Zusammenfassend gilt für den maximalen Wirkungsgrad

$$\eta_{\max} = \frac{M_I}{2} \begin{cases} \theta/4 & : \theta \leq 2 \\ 1 - 1/\theta & : \theta \geq 2 \end{cases} \quad (61)$$

bei einer externen Belastung von

$$Q_{e \text{ opt}} = \begin{cases} Q_i & : \theta \leq 2 \\ Q_i/(\theta - 1) & : \theta \geq 2 \end{cases} \quad (62)$$

Diese Zusammenhänge sind in den Abbildungen 11, 12 und 13 dargestellt. Man entnimmt ihnen, daß für potentielle Sättigungsgrade  $1 \leq \theta \leq 2$  Sättigungsbetrieb zwar möglich, jedoch

<sup>9</sup>Damit beschreibt Gleichung (58), was bereits zuvor bei der qualitativen Diskussion des Sättigungseffektes festgestellt wurde: Daß dem Strahl seine gesamte Energie entzogen wird ist zwar eine hinreichende, nicht jedoch eine notwendige Sättigungsbedingung.

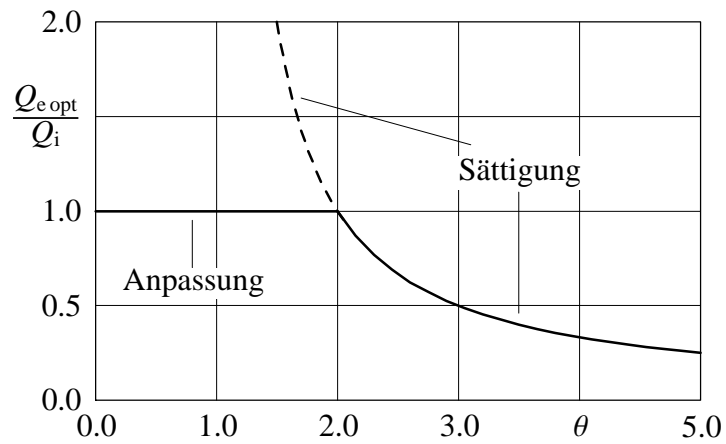


Abbildung 12: Für maximalen Wirkungsgrad einzustellende externe Last (optimale Last) als Funktion des potentiellen Sättigungsgrades. Für  $1 \leq \theta \leq 2$  ist zusätzlich die für Sättigungsbetrieb einzustellende Last eingezeichnet (gestrichelte Linie).

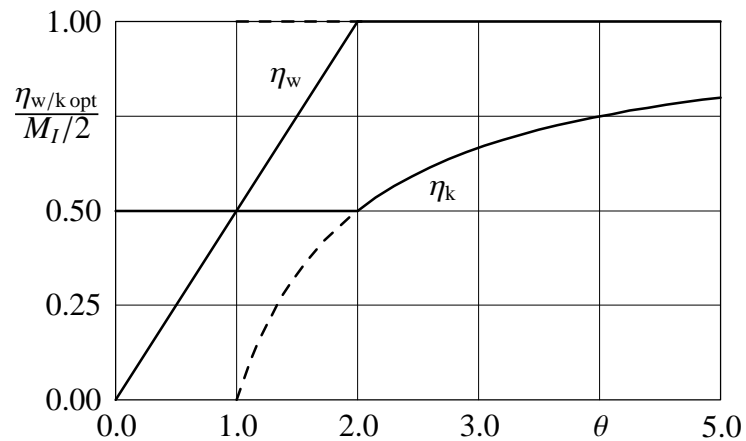


Abbildung 13: Für maximalen Wirkungsgrad einzustellende (optimale) Teilwirkungsgrade als Funktion des potentiellen Sättigungsgrades. Für  $1 \leq \theta \leq 2$  sind zusätzlich beide Wirkungsgrade bei Sättigungsbetrieb dargestellt (gestrichelte Linien).

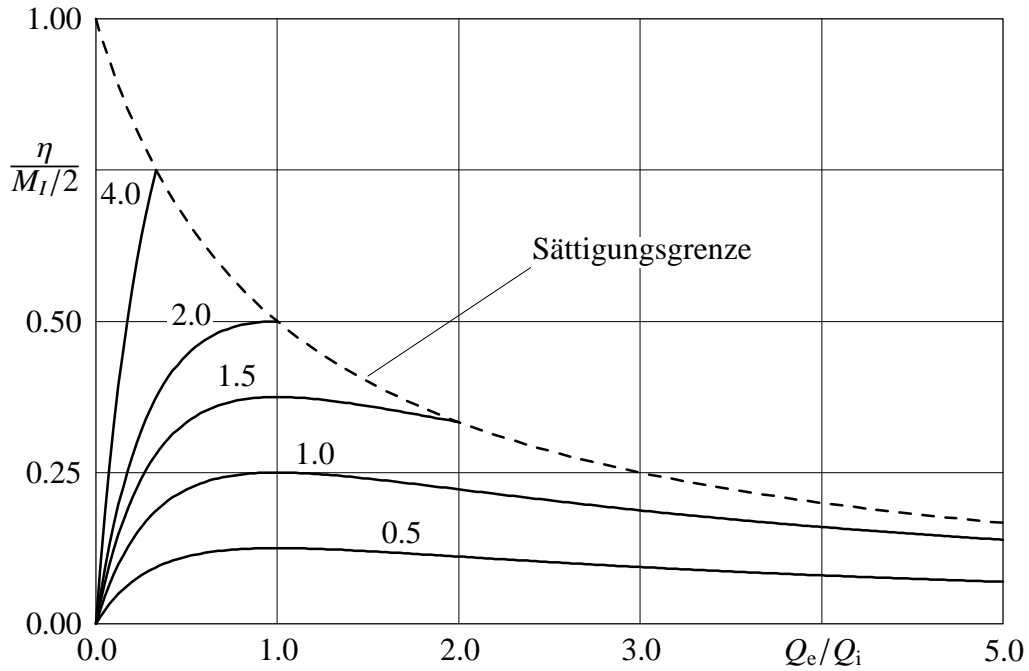


Abbildung 14: Hauptwirkungsgrad als Funktion der Belastung für exemplarische potentielle Sättigungsgrade.

weniger effektiv als Anpassungsbetrieb ist. Im Hinblick auf die Gleichungen (58) und (59) wird man in diesem Falle eine geringere Wandlungseffektivität zugunsten einer größeren Keiseffektivität in Kauf nehmen.

Im praktischen Falle wird es nicht immer möglich sein, optimale Lastbedingungen zu schaffen, weshalb auch die allgemeine Abhängigkeit des Hauptwirkungsgrades von der Belastung angegeben werden soll. Zu dieser Darstellung gelangt man, indem gemäß (57) der Sättigungsgrad aus Gleichung (60) eliminiert wird

$$\eta = \frac{M_I}{2} \theta \frac{Q_e/Q_i}{(1 + Q_e/Q_i)^2}. \quad (63)$$

Diese Gleichung ist natürlich nur solange gültig, wie der sich ihrzufolge ergebende Wirkungsgrad nicht größer als der *Sättigungswirkungsgrad*

$$\eta_{\text{sat}} = \frac{M_I}{2} \frac{1}{1 + Q_e/Q_i} \quad (64)$$

wird. Diese Zusammenhänge sind für einige potentielle Sättigungsgrade in Abbildung 14 dargestellt.

Abschließend sei noch einmal darauf hingewiesen, daß die hier durchgeführte Analyse auf dem Modell des steifen Strahls, also auf der Annahme *konstanter Elektronengeschwindigkeiten* im Ausgangsresonator beruht. Bei einem Betrieb nahe der Sättigungsgrenze ist dies eine sehr grobe Näherung, und die vorgestellten Formel werden daher zu optimistische Werte liefern. Für  $R_0/(M_I R_{\text{sh}}) > 10$  sollten sie jedoch gute Näherungswerte bereitstellen.

## Literatur

- [1] John David Jackson, Classical Electrodynamics, 2nd ed., John Wiley & Sons, New York  
1975