Einführung in die Variationsrechnung (nicht beendet)

Steffen Solyga*

15. Juli 2004 - 22. Februar 2005

Die Variationsrechnung - eine Theorie zur Auffindung optimaler Funktionen - wird in der Ingenieursmathematik i.allg. nicht behandelt. Die folgende Abhandlung über dieses Thema ist zum Selbststudium gedacht. Sie entstammt einem Skriptum zur Analysis von Latt/Wilhelm der ehemaligen Sektion Physik der Humboldt-Universität zu Berlin aus dem Jahre 1977 [2].

1 Einleitung

Es sei M eine Gesamtheit von Funktionen u, die gewisse gemeinsame Eigenschaften besitzen mögen. Wird jeder Funktion $u \in M$ eine Zahl $J\langle u\rangle$ zugeordnet, so nennt man die Zuordnung ein auf M definiertes *Funktional*. Man kann natürlich auch Funktionale von mehreren Funktionen definieren: $J\langle u_1, u_2, \ldots, u_n\rangle$.

Beispiel: M enthalte alle Funktionen $y = y(x)$, die in einem abgeschlossenen Intervall $[x_1, x_2]$ definiert sind, deren Ableitungen $y'(x)$ im offenen Intervall (x_1, x_2) existieren, stetig und beschränkt sind, und die die Randbedingungen $y(x_1) = y_1$, $y(x_2) = y_2$ erfüllen. Dann definiert

$$J\langle y(x)\rangle = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2(x)}\, \mathrm{d}x \tag{1}$$

ein Funktional auf M. Offenbar kann man J als Bogenlänge der ebenen Kurve $x = x$, $y = y(x)$, $x \in [x_1, x_2]$ interpretieren. Entsprechend definiert für zwei Funktionen $y(x)$, $z(x)$

$$J\langle y(x), z(x)\rangle = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2(x) + z'^2(x)}\, \mathrm{d}x \tag{2}$$

ein Funktional, und J kann als Bogenlänge der Raumkurve $x = x$, $y = y(x)$, $z = z(x)$, $x \in [x_1, x_2]$ interpretiert werden.

Gegenstand der Variationsrechnung ist die Theorie der Extrema von Funktionalen. Praktisch sind vor allem solche Funktionale von Bedeutung, die Integrale darstellen, bei denen die Funktionen u oder deren Ableitungen Bestandteile der Integranden sind. Es sollen daher hier auch

*solyga@absinth.net

nur solche Probleme betrachtet werden, bei denen eine oder mehrere Funktionen so zu bestimmen sind, daß ein vorgegebenes ein- oder mehrdimensionales Integral, dessen Wert von den zu bestimmenden Funktionen abhängt, ein Extremum annimmt.

Wichtig sind vor allem die folgenden *Variationsprobleme*:

1. Welche Funktion $y(x)$, die den Randbedingungen $y(x_1) = y_1$, $y(x_2) = y_2$ genügt, macht das Integral

$$J\langle y\rangle = \int_{x_1}^{x_2} f(x,y,y')\,\mathrm{d}x \tag{3}$$

bei gegebener Funktion f zu einem Extremum?

2. Welche Funktionen $y(x)$, $z(x)$, die an den Stellen x_1, x_2 die Werte y_1, y_2, z_1, z_2 annehmen, machen bei gegebener Funktion f das Integral

$$J\langle y,z\rangle = \int_{x_1}^{x_2} f(x,y,z,y',z')\,\mathrm{d}x \tag{4}$$

zu einem Extremum? (Entsprechend für endlich viele Funktionen $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$.)

3. Man bestimme die Funktion $y(x)$, die das Integral

$$J\langle y\rangle = \int_{x_1}^{x_2} f(x,y,y',y'')\,\mathrm{d}x \tag{5}$$

zu einem Extremum macht und den Randbedingungen $y(x_1) = y_1$, $y(x_2) = y_2$, $y'(x_1) = y'_1$, $y'(x_2) = y'_2$ genügt.

4. Man bestimme eine Funktion $u(x,y)$, die das Flächenintegral

$$F\langle u\rangle = \iint_{\mathcal{B}} f(x,y,u,u_x,u_y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{6}$$

zu einem Extremum macht und längs der Randkurve C des Bereiches $\mathcal{B}$ gegebene Werte annimmt.

5. *Isoperimetrisches Problem*: Gegeben seien die beiden Funktionen dreier Veränderlicher g und f, sowie die Konstante A. Welche Funktion $y(x)$, die den Randbedingungen $y(x_1) = y_1$, $y(x_2) = y_2$ und der Nebenbedingung

$$\int_{x_1}^{x_2} g(x,y,y')\,\mathrm{d}x = A \tag{7}$$

genügt, macht das Integral

$$J\langle y\rangle = \int_{x_1}^{x_2} f(x,y,y')\,\mathrm{d}x \tag{8}$$

zu einem Extremum?

6. *Extremum mit Nebenbedingungen*: Gesucht werden zwei Funktionen $y(x)$, $z(x)$, die dem Integral

$$J\langle y,z\rangle \quad = \quad \int\limits_{x_1}^{x_2} f(x,y,z,y',z')\,\mathrm{d}x \tag{9}$$

ein Extremum erteilen, die Gleichung

$$G(x,y,z) \quad = \quad 0 \tag{10}$$

erfüllen und an den Stellen x_1, x_2 die Werte y_1, y_2, z_1, z_2 annehmen. – Offenbar müssen (x_1,y_1,z_1) und (x_2,y_2,z_2) der Bedingung (10) genügen.

2 Fundamentalsatz der Variationsrechnung

Satz 1 *Vorgelegt sei eine auf $[a,b]$ stetige Funktion $f(x)$. Verschwindet für jede auf $[a,b]$ stetig differenzierbare und in den Endpunkten verschwindende Funktionen $\eta(x)$ das Integral*

$$\int\limits_a^b f(x)\,\eta(x)\,\mathrm{d}x, \tag{11}$$

so verschwindet $f(x)$ auf $[a,b]$ identisch.

Beweis 1 Indirekt. Sei $f(\xi) > 0$ für ein gewisses $\xi \in (a,b)$ und o.B.d.A.[1] $a < b$. Aufgrund ihrer Stetigkeit muß f auch in einer gewissen Umgebung von ξ positiv sein. Mithin existiert ein gewisses Teilintervall (α,β) von $[a,b]$ mit $\xi \in (\alpha,\beta)$, so daß $f(x) > 0$ für alle $x \in (\alpha,\beta)$. Offenbar erfüllt

$$\eta(x) \quad = \quad \begin{cases} 0 & \text{für} \quad a \le x \le \alpha \\ (x-\alpha)^2(x-\beta)^2 & \text{für} \quad \alpha \le x \le \beta \\ 0 & \text{für} \quad \beta \le x \le b \end{cases} \tag{12}$$

alle Voraussetzungen von Satz 1. Die (stetige) Funktion $f\eta$ verschwindet überall außer auf (α,β), wo sie positiv ausfällt, so daß ihr Integral ebenfalls einen positiven Wert besitzt. Das aber steht im Widerspruch zur Voraussetzung. **q.e.d.**

Daß die Stetigkeit von f tatsächlich eine Notwendigkeit dafür darstellt, aus dem Verschwinden des Integrals auf das Verschwinden von f schließen zu können, kann man durch Betrachtung der (unstetigen) Funktion

$$f(x) \quad = \quad \begin{cases} 1 & \text{für} \quad x = \xi \\ 0 & \text{für} \quad x \ne \xi \end{cases} \tag{13}$$

leicht einsehen, denn diese bringt das Integral für *jede* (in $x = \xi$ definierte) Funktion η zum Verschwinden, ohne selbst zu verschwinden.

Die Forderungen an η bedürfen jedoch einer Erklärung, könnte man doch dem Gedanken erliegen, Satz 1 folgendermaßen zu „verallgemeinern“:

Satz 2 *Vorgelegt sei eine auf $[a,b]$ stetige Funktion f. Verschwindet das Integral (11) für jede über $[a,b]$ integrierbare Funktion η, so verschwindet f auf $[a,b]$ identisch.*

[1] ohne Beschränkung der Allgemeinheit bzw. ohne Bedenken des Autors

Beweis 2 Man verwendet als Testfunktion $\eta \equiv f$. **q.e.d.**

Wie noch zu sehen sein wird, hat man es bei Variationsproblemen i.allg. mit auf $[a, b]$ stetig differenzierbaren und in a und b verschwindenden Funktionen zu tun. Diese erfüllen offenbar die Voraussetzungen von Satz 1 bezüglich η, jene von Satz 2 jedoch *nicht*! Um letzteren anwenden zu können, hat man das Verschwinden des Integrals für *jede über* $[a, b]$ *integrable Funktion* sicherzustellen und nicht nur für die echte Untermenge der auf $[a, b]$ differenzierbaren Funktionen. Man sollte also bestrebt sein, den Umfang der Testfunktionen η durch zusätzliche Forderungen so weit wie möglich zu beschränken.

Der Fundamentalsatz der Variationsrechnung bleibt auch dann gültig, wenn der Funktion η schärfere Bedingungen auferlegt werden. Beispielsweise kann man fordern, daß sie stetige Ableitungen n-ter Ordnung besitzen soll. Der Beweis bleibt im wesentlichen unverändert; in Gleichung (12) setzt man als Exponent $n + 1$ anstelle der 2.

Außerdem läßt er sich auch auf Funktionen von n Veränderlichen ausdehnen; man hat es dann mit einem n-dimensionalen Integral zu tun. Den Beweis führt man analog; das Teilintervall wird dann zum Innern einer n-dimensionalen Kugel vom Radius ϵ, und für η wählt man z.B. eine nur im Innern der Kugel nicht verschwindende Funktion mit dem Wert $\left(\epsilon^2 - \sum_{i=1}^{n}(x_i - \xi_i)^2\right)^2$.

3 Die Eulersche Gleichung im einfachsten Falle

Betrachtet sei das Funktional

$$J\langle y\rangle = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y')\,\mathrm{d}x, \tag{14}$$

wobei die gegebene Funktion f nebst ihren partiellen Ableitungen bis zur zweiten Ordnung in einem Bereich $\mathcal{B}$ der x-y-Ebene für beliebige Werte von y' als stetig vorausgesetzt wird. Um die Existenz des Funktionals (14) zu gewährleisten, wird von den Funktionen $y(x)$ gefordert, auf dem Intervall $[x_1, x_2]$ stetig differenzierbar zu sein (der Klasse C_1 anzugehören) und vollständig im Innern von $\mathcal{B}$ zu verlaufen. Sind beide Eigenschaften gegeben, wird im folgenden gesagt, y gehöre zur Klasse K_1.

Definition 1 *Gegeben sei eine Zahl $\epsilon > 0$ und zwei auf einem Intervall I definierte Funktionen $y(x)$ und $g(x)$. Es liegt g in der ϵ-Umgebung von y, wenn für alle $x \in I$ gilt $|g(x) - y(x)| < \epsilon$ (ϵ-Umgebung oder ϵ-Nachbarschaft 0. Ordnung).*[2]

Definition 2 *Betrachtet seien nur der Klasse K_1 zugehörige Funktionen. Das Funktional (14) besitzt für $y(x)$ ein relatives Maximum (Minimum), wenn sein Wert für y nicht kleiner (größer) als für beliebige andere in einer ϵ-Umgebung von y liegende Funktionen ist.*

Definition 3 *Es sei D eine Klasse von Funktionen $y(x)$, für die (14) einen Sinn hat. Das Funktional (14) nimmt innerhalb von D ein absolutes Maximum (Minimum) an, wenn sein Wert nicht kleiner (größer) als für alle anderen Funktionen aus D ist.*

Im folgenden werden nur relative Extrema und der Klasse K_1 angehörige Funktionen betrachtet.

[2]Gilt außerdem $|g'(x) - y'(x)| < \epsilon$, so spricht man von einer ϵ-Umgebung 1. Ordnung usw..

Es soll nun eine notwendige Bedingung dafür gesucht werden, daß eine Funktion $y(x)$ dem Funktional (14) ein Extremum erteilt. Es sei $\phi(x)$ eine solche Funktion. Betrachtet man die spezielle, vom Parameter α abhängende Funktion

$$y(x) \quad = \quad \phi(x) + \alpha\eta(x), \tag{15}$$

wobei η eine beliebige (aber K_1 angehörende, siehe oben) Funktion bedeutet, und setzt sie in das Funktional (14) ein, so erhält man

$$\int_{x_1}^{x_2} f[x, \phi(x) + \alpha\eta(x), \phi'(x) + \alpha\eta'(x)]\,\mathrm{d}x \quad = \quad J(\alpha), \tag{16}$$

also eine von α abhängige Funktion. Bei beliebig vorgegebenem positiven ϵ befindet sich $y(x)$ für alle hinreichend kleinen Werte von α in einer ϵ-Umgebung von y. Wenn nun ϕ, wie vorausgesetzt, dem Funktional ein Extremum erteilt, so muß die Funktion (16) für $\alpha = 0$ ein Extremum haben. Eine notwendige Bedingung dafür ist aber das Verschwinden ihrer ersten Ableitung für $\alpha = 0$. Da $\partial f/\partial\alpha = f_\alpha = f_y\eta + f_{y'}\eta'$ bezüglich x und α stetig ist,[3] darf (16) nach der Leibnizschen Regel unter dem Integralzeichen differenziert werden, und man erhält für $\alpha = 0$

$$J'(0) \quad = \quad \int_{x_1}^{x_2} \Big(f_y[x, \phi(x), \phi'(x)]\eta(x) + f_{y'}[x, \phi(x), \phi'(x)]\eta'(x) \Big)\,\mathrm{d}x \quad \stackrel{!}{=} \quad 0. \tag{17}$$

Mittels partieller Integration des zweiten Summanden[4] ergibt sich daraus

$$\big[f_{y'}\eta\big]_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} \eta \left(f_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_{y'} \right) \mathrm{d}x \quad = \quad 0. \tag{18}$$

Eine Funktion $y(x)$, die das Funktional (14) zu einem Extremum machen soll, muß also notwendig eine Lösung von Gleichung (18) bei beliebigem $\eta(x)$ sein.

Von der gesuchten Funktion y sei nun zusätzlich verlangt, daß sie den *Randbedingungen*

$$y(x_1) \;=\; y_1, \qquad y(x_2) \;=\; y_2 \tag{19}$$

genügt.

Literatur

[1] Gregor Michailowitsch Fichtenholz: Differential- und Integralrechnung, Band II. Hochschulbücher für Mathematik Band 62. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 10. Auflage, Berlin 1990

[2] K. Latt, W.E. Wilhelm (Hrsg.): Analysis II - Eine Mathematikskripte zur Unterstützung der Vorlesung. Sektion Physik der Humboldt-Universität zu Berlin, 1977

[3] Das ist wegen der vorausgesetzten Stetigkeit von f_y, $f_{y'}$ und η' der Fall. Zur Regel von Leibniz siehe [1] No. 507.

[4] Eine hinreichende Bedingung für die Zulässigkeit dieser Operation ist die Stetigkeit aller beteiligten Funktionen, insbesondere also $\mathrm{d}f_{y'}/\mathrm{d}x$, siehe z.B. [3] No. 36. An dieser Stelle kommt $\eta''(x)$ ins Spiel.

[3] Hans von Mangoldt, Konrad Knopp: Einführung in die höhere Mathematik, Band III. S. Hirzel Verlag Leipzig, 12. Auflage, 1963

[4] Wladimir Iwanowitsch Smirnow: Lehrgang der höheren Mathematik, Teil IV. Hochschulbücher für Mathematik Band 5. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 5. Auflage, Berlin 1968