Substitution bei bestimmten Integralen

Steffen Solyga*

6. Juni 2005 - 5. September 2005

Satz 1 *1. Sei $f(x)$ auf $[A,B]$ stetig, $A \leq a < b \leq B$.*

2. Sei $x = \phi(t)$ auf $[\alpha,\beta]$ stetig differenzierbar.

3. Für jedes $t \in [\alpha,\beta]$ sei $\phi(t) \in [A,B]$.

4. Sei $\phi(\alpha) = a$ und $\phi(\beta) = b$.

Dann gilt:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \quad = \quad \int_\alpha^\beta f[\phi(t)]\phi'(t)\,\mathrm{d}t. \tag{1}$$

Beweis 1 Wegen Voraussetzung 1 besitzt $f(x)$ auf $[A,B]$ eine Stammfunktion $F(x)$, und es gilt

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \quad = \quad F(b) - F(a). \tag{2}$$

Wegen der Voraussetzungen 2 und 3 ist $\Phi(t) = F[\phi(t)]$ wohldefiniert auf $[\alpha,\beta]$ und dort sogar stetig differenzierbar. Nach der Kettenregel gilt

$$\Phi'(t) \quad = \quad F'[\phi(t)]\phi'(t) \quad = \quad f[\phi(t)]\phi'(t), \tag{3}$$

d.h. $\Phi(t) = F[\phi(t)]$ ist eine Stammfunktion von $f[\phi(t)]\phi'(t)$. Mithin gilt

$$\int_\alpha^\beta f[\phi(t)]\phi'(t)\,\mathrm{d}t \quad = \quad \Phi(\beta) - \Phi(\alpha) \quad = \quad F[\phi(\beta)] - F[\phi(\alpha)], \tag{4}$$

und mit der Voraussetzung 4 folgt schließlich

$$\int_\alpha^\beta f[\phi(t)]\phi'(t)\,\mathrm{d}t \quad = \quad F(b) - F(a). \tag{5}$$

q.e.d.

*solyga@absinth.net

1. Das besondere an Gleichung (1) ist, daß die Umkehrfunktion von $x = \phi(t)$ nicht benötigt wird, wie es beim unbestimmten Integral der Fall ist. Mehr noch: ϕ muß auf dem betrachteten Intervall $[\alpha, \beta]$ nichteinmal umkehrbar sein! Es genügt, *irgendwelche* Werte α und β zu finden, die der Voraussetzung 4 genügen, wie das folgende Beispiel zeigt.

2. In Satz 1 kann man überall $A = a$ und $B = b$ setzen, ohne daß er seine Gültigkeit verlöre. In der obigen Gestalt ist er jedoch allgemeiner.

Als Beispiel sei für $r > 0$ (reelle Konstante) das bestimmte Integral

$$\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\, \mathrm{d}x = \frac{\pi r^2}{4} \tag{6}$$

berechnet. $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ ist stetig auf $[0, r]$, d.h. die Voraussetzung 1 ist erfüllt mit $A = a = 0$ und $B = b = r$. Zur Substitution von x bietet sich die auf ganz $\mathbb{R}$ stetig differenzerbare Funktion $x = \phi(t) = r \sin t$ an. Es ist $\mathrm{d}x = r \cos t\, \mathrm{d}t$ und $\phi(0) = 0$ sowie $\phi(\pi/2) = r$, d.h. $\alpha = 0$ und $\beta = \pi/2$ genügen der Voraussetzung 4. Ferner gilt $r \sin t \in [0, r]$, so daß auch der Voraussetzung 3 genüge getan wird. Nach Gleichung (1) gilt also

$$\begin{aligned}
\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\, \mathrm{d}x &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{r^2 - r^2 \sin^2 t}\; r \cos t\, \mathrm{d}t && (7)\\
&= r^2 \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \sin^2 t}\; \cos t\, \mathrm{d}t && (8)\\
&= r^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 t\, \mathrm{d}t && (9)\\
&= \frac{r^2}{2} \Big[t + \cos t \sin t \Big]_0^{\pi/2} && (10)\\
&= \frac{r^2}{2}\, \frac{\pi}{2}. && (11)
\end{aligned}$$

Alle Voraussetzungen von Satz 1 wären auch für $A = -r$, $B = r$ und z.B. $\alpha = -\pi$, $\beta = 5\pi/2$ erfüllt. Obwohl $x = \phi(t) = r \sin t$ auf $[-\pi, 5\pi/2]$ nicht umkehrbar ist, gilt trotzdem

$$\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\, \mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{5\pi/2} \sqrt{r^2 - r^2 \sin^2 t}\; r \cos t\, \mathrm{d}t. \tag{12}$$

Nur bereitet die Auswertung des rechtsseitigen Integrals größere Mühe, weil nun das Vorzeichen des Kosinus beachtet werden muß: $\sqrt{1 - \sin^2 t} = |\cos t|$.

Literatur

[1] Gregor Michailowitsch Fichtenholz:
Differential- und Integralrechnung, Band 2. (Hochschulbücher für Mathematik Band 62.)
VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 10. Auflage, Berlin 1990