Lineare Differentialgleichungssysteme erster Ordnung

Steffen Solyga*

18. April - 15. August 2006

1 Motivation

Jede gewöhnliche, lineare Differentialgleichung (kurz: Dgl.) n-ter Ordnung

$$y^{(n)}(t) + p_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \cdots + p_1(t)y'(t) + p_0(t)y(t) \quad = \quad u(t) \tag{1}$$

für die unbekannte Funktion $y(t)$ läßt sich in ein System aus n linearen Differentialgleichungen erster Ordnung überführen. Setzt man z.B.

$$\begin{aligned} x_1(t) &:= y(t), && (2)\\ x_2(t) &:= y'(t), && (3)\\ &\vdots \\ x_{n-1}(t) &:= y^{(n-2)}(t) && (4)\\ x_n(t) &:= y^{(n-1)}(t), && (5) \end{aligned}$$

so erhält man durch Differentiation von (2) und Vergleich mit (3) daraus $x_1'(t) = x_2(t)$. Dieselbe Vorgehensweise mit (3) bis (5) liefert zusammen mit der Differentialgleichung (1)

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t), && (6)\\ \dot{x}_2(t) &= x_3(t), && (7)\\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1}(t) &= x_n(t), && (8)\\ \dot{x}_n(t) &= -p_{n-1}(t)x_n(t) - \cdots - p_1(t)x_2(t) - p_0(t)x_1(t) + u(t). && (9) \end{aligned}$$

Der Übersichtlichkeit halber verwendet man gern die Matrixschreibweise

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ -p_0(t) & -p_1(t) & \cdots & -p_{n-1}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ u(t) \end{pmatrix}, \tag{10}$$

*solyga@gmx.de

kurz

$$\dot{\mathbf{x}}(t) \quad = \quad \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t), \tag{11}$$

bzw.

$$\dot{\mathbf{x}}(t) \quad = \quad \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}(t). \tag{12}$$

Gegebenenfalls zu berücksichtigende Anfangswerte $y(t_0) = y_0$, $y'(t_0) = y_1$, $\ldots$, $y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1}$ gehen offenbar über in die Anfangsbedingung

$$\mathbf{x}(t_0) \quad = \quad \mathbf{x}_0. \tag{13}$$

Der Vorteil, von einer Gleichung n-ter Ordnung (1) zu einem System aus n Gleichungen (12) überzugehen, besteht also zunächst in einem Gewinn an Übersichtlichkeit, was zum einen der Matrixschreibweise, zum anderen der Reduktion der Ordnung geschuldet ist. Wie noch zu sehen sein wird, bleibt das Problem der Lösungsfindung im Kern davon allerdings unberührt.

Oftmals stellt sich ein konkretes Problem fast direkt in Form eines Differentialgleichungssystems (kurz: Dgls.). Die Funktionen $x_i(t)$, deren Einführung als Ableitungen von $y(t)$ weiter oben etwas willkürlich anmuten mag, besitzen im allgemeinen nämlich eine unmittelbare physikalische Bedeutung: Ihre Anzahl n kann als Anzahl der Energiespeicher und ihr Quadrat als im i-ten Speicher enthaltene Energie gedeutet werden. In der Systemtheorie nennt man die $x_i(t)$ Zustandsvariablen und die Spaltenmatrix $\mathbf{x}(t)$ Zustandsvektor (kurz: Zustand) des beschriebenen linearen Systems. Die Anfangswerte stellen damit den initialen Systemzustand dar.

Abschließend sei zum Übergang von (1) nach (12) noch folgendes angemerkt: Die verwendete Vorschrift $x_i(t) := y^{(i-1)}(t)$ ist nur eine von vielen möglichen, um zu einem *äquivalenten* Differentialgleichungssystem zu gelangen; $x_i(t) := \sum_{\nu=1}^{i} y^{(\nu-1)}(t)$ wäre eine weitere. Wie auch immer eine solche Vorschrift gewählt wird: Wesentlich ist, daß die n definierten Funktionen $x_i(t)$ *linear unabhängig* sind, wie es bei den angeführten Methoden der Fall ist. In engem Zusammenhang damit steht die *Regularität* der Matrix $\mathbf{A}(t)$. Offenbar ist $\mathbf{A}(t)$ genau dann regulär (d.h. es gilt $\det(\mathbf{A}) \not\equiv 0$), wenn $p_0(t)$ nicht identisch verschwindet – man entwickle $\det(\mathbf{A})$ nach der letzten Zeile. Bei $p_0(t) \equiv 0$ läßt sich die Dgl. (1) um eine Ordnung und ein äquivalentes Dgls. um eine Gleichung reduzieren.

2 Grundlegendes

Auf dem Intervall (α, β) seien n^2 stetige komplexwertige Funktionen $a_{ij}(t)$ und n stückweise stetige komplexwertige Funktionen $b_i(t)$ der reellen Veränderlichen t gegeben ($i, j = 1, \ldots, n$). Gesucht sind n komplexwertige Funktionen $x_i(t)$, die auf (α, β) folgenden Gleichungen genügen:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\dot{x}_1(t) & = & a_{11}(t)x_1(t) & + & a_{12}(t)x_2(t) & + & \cdots & + & a_{1n}(t)x_n(t) & + & b_1(t) \\
\dot{x}_2(t) & = & a_{21}(t)x_1(t) & + & a_{22}(t)x_2(t) & + & \cdots & + & a_{2n}(t)x_n(t) & + & b_2(t) \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\
\dot{x}_n(t) & = & a_{n1}(t)x_1(t) & + & a_{n2}(t)x_2(t) & + & \cdots & + & a_{nn}(t)x_n(t) & + & b_n(t)
\end{array} \tag{14}$$

Zur Vereinfachung der Schreibweise seien folgende Matrizen definiert:

$$\mathbf{A}(t) := \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b}(t) := \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}, \tag{15}$$

$$\mathbf{x}(t) := \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \qquad \dot{\mathbf{x}}(t) := \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{pmatrix}. \tag{16}$$

Mit den üblichen Definitionen für die Addition typengleicher Matrizen, die Multiplikation einer Matrix mit einem Skalar und die Multiplikation zweier verketteter Matrizen läßt sich das System (14) nun kurz schreiben als

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}(t), \tag{I}$$

wobei die $n\times n$-Matrix $\mathbf{A}(t)$ und die $n\times 1$-Matrix $\mathbf{b}(t)$ gegeben und die $n\times 1$-Matrix $\mathbf{x}(t)$ gesucht sind. Die $n\times 1$-Matrizen werden im Folgenden auch als Vektorfunktionen oder kurz als *Vektoren* bezeichnet.[1]

(I) ist die allgemeine Form eines *linearen Differentialgleichungssystems erster Ordnung*. Verschwindet die sogenannte Störung oder Erregung $\mathbf{b}(t)$ identisch, d.h. für alle $t \in (\alpha, \beta)$, nennt man das System *homogen*:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t). \tag{H}$$

Anderenfalls nennt man es *inhomogen*.[2] Unter den bezüglich $\mathbf{A}(t)$ und $\mathbf{b}(t)$ getätigten Voraussetzungen gilt der folgende

Satz 1 *(Existenz- und Eindeutigkeitssatz) Das Anfangswertproblem*

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}(t), \tag{17}$$

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \tag{18}$$

besitzt bei gegebener Anfangsstelle t_0 und gegebenem Anfangsvektor $\mathbf{x}_0$ genau eine Lösung $\mathbf{x}(t)$.

Zwischen Lösungen des homogenen Systems (H) und des inhomogenen Systems (I) bestehen nun folgende Zusammenhänge:

Satz 2 *Für jede Lösung $\mathbf{x}_1(t)$ der homogenen Gleichung (H) und jede Lösung $\mathbf{x}_2(t)$ der inhomogenen Gleichung (I) ist $\mathbf{x}_1(t) + \mathbf{x}_2(t)$ eine Lösung der inhomogenen Gleichung (I).*

Beweis 2 Sei $\mathbf{x}_1$ eine beliebige Lösung von (H) und $\mathbf{x}_2$ eine beliebige Lösung von (I), d.h. es ist $\dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{A}\mathbf{x}_1$ und $\dot{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{A}\mathbf{x}_2 + \mathbf{b}$. Dann löst $\mathbf{x} := \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$ offenbar (I), denn es gilt

$$\dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{x}}_1 + \dot{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{A}\mathbf{x}_1 + (\mathbf{A}\mathbf{x}_2 + \mathbf{b}) = \mathbf{A}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) + \mathbf{b} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}.$$

q.e.d.

Satz 3 *Für jedes Paar $\mathbf{x}_1(t)$, $\mathbf{x}_2(t)$ von Lösungen der inhomogenen Gleichung (I) ist $\mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_2(t)$ eine Lösung der homogenen Gleichung (H).*

[1] Dies ist der Tatsache geschuldet, daß die Menge der $n \times 1$-Matrizen aus komplexen Zahlen einen Vektorraum bilden, welcher allerdings hier nicht weiter von Interesse ist.

[2] Nach dieser – durchaus üblichen – Definition hängt die Homogenität des Systems (I) eigentlich von $\mathbf{b}(t)$ ab. Da jedoch der Algorithmus zur Lösung dieses Systems den Spezialfall $\mathbf{b}(t) \equiv \mathbf{0}$ stets mit einschließt, nennt man es oft auch dann inhomogen, wenn über $\mathbf{b}(t)$ gar nichts vorausgesetzt wird.

Beweis 3 Seien $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ beliebige Lösungen von (I), d.h. es ist $\dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{A}\mathbf{x}_1 + \mathbf{b}$ und $\dot{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{A}\mathbf{x}_2 + \mathbf{b}$. Dann löst $\mathbf{x} := \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$ offenbar (H), denn es gilt

$$\dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{x}}_1 - \dot{\mathbf{x}}_2 = (\mathbf{A}\mathbf{x}_1 + \mathbf{b}) - (\mathbf{A}\mathbf{x}_2 + \mathbf{b}) = \mathbf{A}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = \mathbf{A}\mathbf{x}.$$

q.e.d.

Offenbar gelten die Sätze 2 und 3 auch für $\mathbf{b}(t) \equiv \mathbf{0}$, d.h. für homogene Systeme.

Über die Struktur der Lösungsmenge des inhomogenen Gleichungssystems läßt sich daher folgendes aussagen:

Satz 4 *Ist $\mathbf{x}_\mathrm{p}(t)$ eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung (I), und durchläuft $\mathbf{x}_\mathrm{h}(t)$ alle Lösungen der homogenen Gleichung (H), so durchläuft $\mathbf{x}_\mathrm{p}(t) + \mathbf{x}_\mathrm{h}(t)$ alle Lösungen der inhomogenen Gleichung (I).*

Beweis 4 Zunächsteinmal ist jede nach dem Schema $\mathbf{x}_\mathrm{p} + \mathbf{x}_\mathrm{h}$ gewonnene Funktion gemäß Satz 2 tatsächlich eine Lösung von (I). Andererseits kann nach diesem Schema aber auch keine Lösung von (I) ausgelassen werden, denn gemäß Satz 3 muß für jede Lösung $\mathbf{x}$ von (I) $\mathbf{x} - \mathbf{x}_\mathrm{p}$ eine Lösung von (H) sein und daher von $\mathbf{x}_\mathrm{h}$ durchlaufen werden. q.e.d.

Jede spezielle Lösung einer Gleichung nennt man eine *partikuläre* Lösung dieser Gleichung; die Lösungsmenge einer Gleichung nennt man ihre *allgemeine* Lösung.[3] Satz 4 läßt sich daher auch folgendermaßen formulieren: Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung ergibt sich als Summe einer ihrer partikulären Lösungen und der allgemeinen Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung.

Damit ist die Lösung der inhomogenen Gleichung auf die Bestimmung der Lösungsmenge der zugehörigen homogenen Gleichung und die Bestimmung einer partikulären Lösung der inhomogenen Gleichung zurückgeführt. Mit diesen beiden Problemen werden wir uns im Folgenden getrennt beschäftigen.

3 Die homogene Gleichung

Setzt man in Satz 2 $\mathbf{b}(t) \equiv \mathbf{0}$, so erhält man die Aussage, daß die Summe zweier Lösungen der homogenen Gleichung wieder eine Lösung dieser Gleichung sein muß. In erweiterter Form hat man damit

Satz 5 *Sind $\mathbf{x}_1(t)$, $\mathbf{x}_2(t)$, $\ldots$, $\mathbf{x}_k(t)$ Lösungen der homogenen Gleichung (H), so ist auch jede Linearkombination $c_1\mathbf{x}_1(t) + c_2\mathbf{x}_2(t) + \cdots + c_k\mathbf{x}_k(t)$ eine Lösung dieser Gleichung.*

Beweis 5 Laut Voraussetzung ist $\dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{A}\mathbf{x}_1, \ldots, \dot{\mathbf{x}}_k = \mathbf{A}\mathbf{x}_k$. Daher gilt für $\mathbf{x} = c_1\mathbf{x}_1 + \cdots + c_k\mathbf{x}_k$

$$\dot{\mathbf{x}} = c_1\dot{\mathbf{x}}_1 + \cdots + c_k\dot{\mathbf{x}}_k = c_1\mathbf{A}\mathbf{x}_1 + \cdots + c_k\mathbf{A}\mathbf{x}_k = \mathbf{A}(c_1\mathbf{x}_1 + \cdots + c_k\mathbf{x}_k) = \mathbf{A}\mathbf{x}.$$

q.e.d.

Die Lösungsmenge der homogenen Gleichung (H) bildet also einen *linearen Raum*.[4] Daher

[3] In diesem Sinne sind die partikulären Lösungen die Elemente der allgemeinen Lösung.

[4] Dieser Raum ist nicht zu verwechseln mit dem Vektorraum $\mathbb{C}^n$ der $n \times 1$-Matrizen aus komplexen Zahlen! Der $\mathbb{C}^n$ stellt nur die Bildmenge des hier angesprochenen Raumes, dessen Elemente *Abbildungen* – nämlich Funktionen der reellen Veränderlichen t – und nicht Matrizen sind. Das neutrale Element des $\mathbb{C}^n$ ist $\mathbf{0}$, die aus der komplexen Zahl 0 gebildete $n \times 1$-Matrix. Das neutrale Element der Lösungsmenge von (H) hingegen ist die Funktion $\mathbf{0}(t)$, jene Abbildung, die jedem $t \in (\alpha, \beta)$ die $n \times 1$-Matrix $\mathbf{0}$ zuordnet. Da nun keine Verwechslungen zu befürchten sind, wird $\mathbf{0}(t)$ kurz als $\mathbf{0}$ geschrieben.

spielt die *lineare Unabhängigkeit* von Lösungen dieser Gleichung eine wichtige Rolle. Diese wird wie bei skalaren Funktionen definiert:

Definition 1 *Die Funktionen $\mathbf{x}_1(t)$, $\mathbf{x}_2(t)$, …, $\mathbf{x}_k(t)$ heißen linear unabhängig auf (α,β), wenn die auf (α,β) definierte Bestimmungsgleichung $c_1\mathbf{x}_1(t) + c_2\mathbf{x}_2(t) + \cdots + c_k\mathbf{x}_k(t) \equiv \mathbf{0}$ für die komplexen Konstanten c_1 bis c_k nur die triviale Lösung besitzt.*

Die Betonung liegt auf *nur*, denn die Gleichung ist homogen und besitzt damit automatisch die triviale Lösung $c_1 = c_2 = \cdots = c_k = 0$. Ferner sei bemerkt, daß die lineare Unabhängigkeit an ein Intervall gebunden ist; Funktionen, die auf einem Intervall linear unabhängig sind, können durchaus auf einem anderen Intervall linear abhängig sein. Alle weiteren Betrachtungen beziehen sich auf das Intervall (α,β).

Definition 2 *Die Funktionen $\mathbf{x}_1(t)$, $\mathbf{x}_2(t)$, …, $\mathbf{x}_k(t)$ heißen linear abhängig auf (α,β), wenn die auf (α,β) definierte Bestimmungsgleichung $c_1\mathbf{x}_1(t)+c_2\mathbf{x}_2(t)+\cdots+c_k\mathbf{x}_k(t) \equiv \mathbf{0}$ für die komplexen Konstanten c_1 bis c_k eine nichttriviale Lösung besitzt.*[5]

Wenn also k komplexe Konstanten c_1 bis c_k existieren, von denen wenigstens eine ungleich Null ist, so daß $c_1\mathbf{x}_1(t) + c_2\mathbf{x}_2(t) + \cdots + c_k\mathbf{x}_k(t)$ *für alle* $t \in (\alpha,\beta)$ verschwindet, dann ist das Funktionensystem $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k\}$ linear abhängig.[6]

Die Frage, ob k beliebig vorgelegte Funktionen

$$\mathbf{x}_1(t) = \begin{pmatrix} x_{11}(t) \\ x_{21}(t) \\ \vdots \\ x_{n1}(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_2(t) = \begin{pmatrix} x_{12}(t) \\ x_{22}(t) \\ \vdots \\ x_{n2}(t) \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad \mathbf{x}_k(t) = \begin{pmatrix} x_{1k}(t) \\ x_{2k}(t) \\ \vdots \\ x_{nk}(t) \end{pmatrix} \tag{19}$$

nun linear unabhängig sind oder nicht, beantwortet die lineare Algebra. Betrachten wir zunächst den Fall, daß genausoviele Funktionen gegeben sind, wie jede Funktion Zeilen hat, $k = n$. Dann läßt sich aus diesen Funktionen durch Aneinanderreihen zunächst eine $n \times n$-Matrix und daraus wiederum eine Determinante, die sogenannte Wronskische[7] Determinante dieser n Funktionen bilden

$$W[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n](t) := \begin{vmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \cdots & x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \cdots & x_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \cdots & x_{nn}(t) \end{vmatrix}, \tag{20}$$

und es gilt folgender

Satz 6 *Sind die Funktionen $\mathbf{x}_1(t)$, $\mathbf{x}_2(t)$, …, $\mathbf{x}_n(t)$ linear abhängig, so verschwindet ihre* Wronski*determinante identisch.*

Beweis 6 Laut Voraussetzung (siehe Definition 2) besitzt das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \cdots & x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \cdots & x_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \cdots & x_{nn}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \tag{21}$$

[5] „linear unabhängig“ ist also dasselbe wie „nicht linear abhängig“.

[6] Der Fall $k = 1$ wird nicht ausgeschlossen. Offenbar gilt: Eine Funktion $\mathbf{x}(t)$ ist linear abhängig genau dann, wenn sie auf (α,β) identisch verschwindet.

[7] Joseph Marie Wronski, 1778-1853, polnischer Philosoph und Mathematiker

für jedes $t \in (\alpha,\beta)$ eine nichttriviale Lösung. Wie die lineare Algebra lehrt, ist dies aber genau dann der Fall, wenn seine Koeffizientendeterminante – die Wronskideterminante der Funktionen $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ – auf (α,β) identisch verschwindet. q.e.d.

Das Verschwinden der Wronskideterminante ist also *notwendig* für die lineare Abhängigkeit der Funktionen, *hinreichend* ist ihr Verschwinden jedoch nicht. Z.B. verschwindet die Wronskideterminante der auf $\mathbb{R}$ stetig differenzierbaren Funktionen

$$\mathbf{x}_1(t) := \begin{cases} \begin{pmatrix} t^2 \\ 0 \end{pmatrix} & \text{sofern} \quad t \leq 0 \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \text{sofern} \quad t > 0 \end{cases}, \qquad \mathbf{x}_2(t) := \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \text{sofern} \quad t \leq 0 \\ \begin{pmatrix} t^2 \\ 0 \end{pmatrix} & \text{sofern} \quad t > 0 \end{cases} \tag{22}$$

identisch, obwohl $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ auf $\mathbb{R}$ linear unabhängig sind: Aus $c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 \equiv \mathbf{0}$ folgt nämlich $c_1 = 0$ für $t \leq 0$ und $c_2 = 0$ für $t > 0$. Da c_1 und c_2 für *alle* $t \in \mathbb{R}$ gleich gewählt werden müssen (Konstanten bezüglich t), folgt $c_1 = c_2 = 0$. Allerdings können derartige Funktionen keine Lösungen der Differentialgleichung (H) sein, denn es gilt

Satz 7 *Verschwindet die* Wronski*determinante der Lösungen* $\mathbf{x}_1(t)$, $\mathbf{x}_2(t)$, $\ldots$, $\mathbf{x}_n(t)$ *von (H) identisch, so sind sie linear abhängig.*

Beweis 7 Laut Voraussetzung verschwindet die Koeffizientendeterminante von (21) identisch, so daß das Gleichungssystem für jedes $t \in (\alpha,\beta)$ eine nichttriviale Lösung besitzt. Diese könnte jedoch für jedes t anders ausfallen, d.h. die c_i könnten von t abhängig sein.[8] Dies wird nun aber dadurch ausgeschlossen, daß die Funktionen als Lösungen der Differentialgleichung (H) vorausgesetzt sind: Wir betrachten die nichttriviale Lösung von (21) an einer festen Stelle t_0 und bilden mit diesen (nicht sämtlich verschwindenden) c_i die Vektorfunktion $\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{x}_1(t) + c_2\mathbf{x}_2(t) + \cdots + c_n\mathbf{x}_n(t)$. Gemäß Satz 5 ist $\mathbf{x}(t)$ eine Lösung von (H). Außerdem ist $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{0}$, denn die c_i sind die Lösungen von (21) für $t = t_0$. Nun ist sicherlich die Vektorfunktion $\mathbf{0}(t) \equiv \mathbf{0}$ eine Lösung von (H), und wegen des Eindeutigkeitssatzes, Satz 1, ist es die *einzige* Lösung zum Anfangswert $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{0}$. Dann muß $\mathbf{x}(t)$ mit dieser Lösung zusammenfallen, d.h. es ist $\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{x}_1(t) + c_2\mathbf{x}_2(t) + \cdots + c_n\mathbf{x}_n(t) \equiv \mathbf{0}$, ohne daß alle c_i verschwänden. q.e.d.

Zusammenfassend hat man daher:

Satz 8 *Sind* $\mathbf{x}_1(t)$, $\mathbf{x}_2(t)$, $\ldots$, $\mathbf{x}_n(t)$ *Lösungen von (H), dann gilt:*

$$\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t), \ldots, \mathbf{x}_n(t) \text{ sind linear abhängig} \quad \Longleftrightarrow \quad W[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n](t) \equiv \mathbf{0}.$$

Der Beweis von Satz 7 hat zusätzlich folgendes gezeigt: Die Wronskideterminante von Lösungen von (H) verschwindet entweder für alle oder für kein $t \in (\alpha,\beta)$. Damit hat man ein sehr einfaches Kriterium zum Test der linearen Abhängigkeit von n beliebigen Lösungen von (H): Man berechne ihre Wronskideterminante *an einer einzigen Stelle* $t_0 \in (\alpha,\beta)$. Verschwindet sie, so sind die Funktionen auf (α,β) linear abhängig, anderenfalls sind sie linear unabhängig.

Werden nicht genau n Funktionen vorgelegt, $k \neq n$, kann man den Rang der aus den betrachteten Vektoren gebildeten Matrix untersuchen. Dieser Fall ist bei Lösungen von (H) allerdings von geringerem praktischen Interesse, wie die folgenden Sätze nahelegen:

Satz 9 *Es existiert ein System von n linear unabhängigen Lösungen von (H).*

[8] Dies gereichte nicht zur linearen Abhängigkeit der $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$, denn die c_i müssen gemäß Definition 2 Konstanten, d.h. von t unabhängige Zahlen sein.

Beweis 9 Seien $\mathbf{c}_1$, $\mathbf{c}_2$, ..., $\mathbf{c}_n$ linear unabhängige, konstante Vektoren, z.B. die Spalten der n-reihigen Einheitsmatrix. Gemäß Satz 1 existieren n Lösungen $\mathbf{x}_1(t)$, $\mathbf{x}_2(t)$, ..., $\mathbf{x}_n(t)$ von (H) mit den Eigenschaften $\mathbf{x}_1(t_0) = \mathbf{c}_1$, $\mathbf{x}_2(t_0) = \mathbf{c}_2$, ..., $\mathbf{x}_n(t_0) = \mathbf{c}_n$, wobei $t_0 \in (\alpha,\beta)$ beliebig gewählt sei. Diese Funktionen müssen aber auf (α,β) linear unabhängig sein, denn es ist $W[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n](t_0) = \det[\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_n] \neq 0$. q.e.d.

Satz 10 *Seien $\mathbf{x}_1(t)$, $\mathbf{x}_2(t)$, ..., $\mathbf{x}_n(t)$ linear unabhängige Lösungen von (H), und sei $\mathbf{x}(t)$ eine beliebige Lösung von (H). Dann existieren eindeutig bestimmte komplexen Konstanten c_1, c_2, ..., c_n, so daß für alle $t \in (\alpha,\beta)$ gilt:*

$$\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{x}_1(t) + c_2\mathbf{x}_2(t) + \cdots + c_n\mathbf{x}_n(t). \tag{23}$$

Beweis 10 *Existenz:* Sei $t_0 \in (\alpha,\beta)$ beliebig gewählt. Dann ist $W[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n](t_0) \neq 0$, weshalb (23) an der Stelle t_0 eine eindeutig bestimmte Lösung c_1, c_2, ..., c_n besitzt. Mit diesen Konstanten bilden wir die wohldefinierte Funktion $\bar{\mathbf{x}}(t) = c_1\mathbf{x}_1(t) + c_2\mathbf{x}_2(t) + \cdots + c_n\mathbf{x}_n(t)$. Dann ist $\bar{\mathbf{x}}(t_0) = \mathbf{x}(t_0)$. Andererseits sind $\bar{\mathbf{x}}$ und $\mathbf{x}$ beides Lösungen von (H), so daß sie wegen gleicher Anfangswerte zusammenfallen müssen. Die lediglich für $t = t_0$ berechneten Konstanten c_i passen also für alle $t \in (\alpha,\beta)$.
Eindeutigkeit: Seien c'_1, c'_2, ..., c'_n die (wieder eindeutig bestimmten) Konstanten für $t = t_1$. Dann ist sowohl $\bar{\mathbf{x}}(t)$ als auch $\tilde{\mathbf{x}}(t) = c'_1\mathbf{x}_1(t) + c'_2\mathbf{x}_2(t) + \cdots + c'_n\mathbf{x}_n(t)$ eine Darstellung von $\mathbf{x}(t)$, d.h. es ist $\bar{\mathbf{x}}(t) \equiv \mathbf{x}(t) \equiv \tilde{\mathbf{x}}(t)$ und mithin $(c_1 - c'_1)\mathbf{x}_1(t) + (c_2 - c'_2)\mathbf{x}_2(t) + \ldots + (c_n - c'_n)\mathbf{x}_n(t) \equiv \mathbf{0}$. Die Koeffizientendeterminante dieses linearen Systems für die $c_i - c'_i$ verschwindet als Wronskideterminate der $\mathbf{x}_i(t)$ nirgends, so daß das System nur die triviale Lösung $c_i - c'_i = 0$ besitzt. Also gilt $c'_i = c_i$, womit die Darstellung von $\mathbf{x}$ als Linearkombination der $\mathbf{x}_i$, Gleichung (23), eindeutig ist. q.e.d.

Der Lösungsraum von (H) besitzt also die Dimension n, und jedes System von n linear unabhängigen Lösungen von (H) ist dort eine Basis.

Definition 3 *Jede Basis des Lösungsraumes von (H) nennt man Fundamentalsystem von (H).*

Gemäß Satz 10 ist *jede* Lösung von (H) darstellbar als Linearkombination der Elemente eines Fundamentalsystems von (H). Anders ausgedrückt: Ist $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ ein Fundamentalsystem von (H), so ist (23) – mit frei wählbaren Konstanten c_i – ihre *allgemeine* Lösung. Die homogene Gleichung darf also als gelöst betrachtet werden, sobald eines ihrer Fundamentalsysteme gefunden wurde.

Sofern die Elemente der Matrix $\mathbf{A}$ Konstanten, d.h. nicht von t abhängig sind, läßt sich ein Fundamentalsystem verhältnismäßig einfach angeben. Allerdings werden dafür einige weniger elementare Begriffe und Zusammenhänge aus der linearen Algebra benötigt, welche nun in knapper Form dargestellt werden. Eine ausführlichere Darstellung bietet [4].

4 Eigenwerte und Eigenvektoren

Es sei $\mathbf{A}$ eine $n \times n$-Matrix, $\mathbf{x}$ eine $n \times 1$-Matrix (Vektor), $\mathbf{E}$ die $n \times n$-Einheitsmatrix und λ eine komplexe Zahl. Wir betrachten das vom Parameter λ abhängige lineare Gleichungssystem[9]

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{0}. \tag{24}$$

[9]Gleichung (24) ist äquivalent zu $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$.

Definition 4 *Besitzt (24) für ein gewisses λ eine nichttriviale Lösung $\mathbf{x}$, so nennt man λ einen Eigenwert von $\mathbf{A}$ und jede zugehörige nichttriviale Lösung $\mathbf{x}$ einen zum Eigenwert λ gehörenden Eigenvektor.*

Der Nullvektor ist also explizit ausgeschlossen.
Offenbar gilt: λ ist Eigenwert von $\mathbf{A} \quad \Longleftrightarrow \quad \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = 0$.

Definition 5 $P(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})$ *nennt man charakteristisches Polynom von* $\mathbf{A}$.

Die Eigenwerte der Matrix $\mathbf{A}$ sind also die Nullstellen ihres charakteristischen Polynoms. Daher besitzt $\mathbf{A}$ höchstens n paarweise verschiedene Eigenwerte. Die Gleichung $P(\lambda) = 0$ nennt man auch charakteristische Gleichung von $\mathbf{A}$.

Definition 6 *Ist λ eine Nullstelle der Vielfachheit α des charakteristischen Polynoms von $\mathbf{A}$, so nennt man λ Eigenwert von $\mathbf{A}$ mit der (algebraischen) Vielfachheit α.*[10]

Besitzt die Matrix $\mathbf{A}$ genau k paarweise verschiedene Eigenwerte λ_i mit den Vielfachheiten α_i, so ist $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k = n$.

Satz 11 *Seien $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ paarweise verschiedene Eigenwerte von $\mathbf{A}$. Dann ist jedes System von zugehörigen Eigenvektoren $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k\}$ linear unabhängig.*

Die λ_i können durchaus mehrfache Eigenwerte von $\mathbf{A}$ sein.

Satz 12 *Ist λ ein Eigenwert von $\mathbf{A}$ mit der Vielfachheit α, so besitzt die Gleichung*

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})^\alpha \mathbf{x} \quad = \quad \mathbf{0} \tag{25}$$

genau α linear unabhängige Lösungen $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_\alpha$.

Im Falle $\alpha = 1$ ist (25) identisch mit (24), so daß dann jede nichttriviale Lösung auch ein Eigenvektor von $\mathbf{A}$ zum Eigenwert λ ist. Im allgemeinen sind die $\mathbf{x}_i$ jedoch keine Eigenvektoren!
Beispiele:

1. Die Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ besitzt zwei einfache Eigenwerte, denn ihre charakteristische Gleichung $\lambda^2 - 1 = 0$ hat die beiden Lösungen $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = -1$. Die Vielfachheiten sind folglich $\alpha_1 = \gamma_1 = 1$ und $\alpha_2 = \gamma_2 = 1$. Zugehörige Eigenvektoren wären z.B. $\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Offenbar ist – Satz 11 bestätigend – das System $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\}$ linear unabhängig.

2. Das charakteristische Polynom von $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ist $P(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1$, weshalb die Matrix nur den Eigenwert $\lambda = 1$ besitzt. Folglich ist $\alpha = 2$. Weil der Rang von $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ Null ist, gilt $\gamma = 2$, d.h. die Matrix besitzt zwei linear unabhängige Eigenvektoren, z.B. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Diese Vektoren sind offenbar gleichzeitig nichttriviale Lösungen von (25).

[10] Den Lösungsraum von (24) nennt man Eigenraum von $\mathbf{A}$ zum Eigenwert λ; bis auf den Nullvektor ist jedes seiner Elemente ein Eigenvektor von $\mathbf{A}$ zum Eigenwert λ. Die Dimension des Eigenraums nennt man auch die geometrische Vielfachheit γ des jeweiligen Eigenwerts. Für jede $n \times n$-Matrix $\mathbf{A}$ und jeden ihrer Eigenwerte λ gilt: $1 \leq \gamma \leq \alpha \leq n$.

3. Für $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ist ebenfalls $\lambda = 1$ und $\alpha = 2$, jedoch besitzt diese Matrix nur einen linear unabhängigen Eigenvektor, z.B. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, d.h. es ist $\gamma = 1$. Wie es Satz 12 zufolge sein muß, hat (25) aber zwei linear unabhängige (und daher nichttriviale) Lösungen, denn der Rang der Koeffizientenmatrix ist Null.

5 Fundamentalsysteme bei konstanter Matrix $\mathbf{A}$

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit der Bestimmung eines Fundamentalsystems von

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t). \tag{H}$$

Dabei wird die $n \times n$-Matrix $\mathbf{A}$ als konstant, d.h. als nicht von t abhängig vorausgesetzt.

5.1 Der EULERsche Ansatz

Um zu einer Lösung von (H) zu gelangen, machen wir den nach EULER[11] benannten Ansatz

$$\mathbf{x}(t) = e^{\lambda t}\mathbf{c}, \tag{26}$$

wobei λ eine komplexe Konstante und $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$ einen konstanten Vektor bezeichnen. Einsetzen in (H) liefert $\lambda e^{\lambda t}\mathbf{c} = e^{\lambda t}\mathbf{A}\mathbf{c}$, und Multiplikation mit $e^{-\lambda t}$ liefert $\mathbf{A}\mathbf{c} = \lambda\mathbf{c}$. (26) ist also genau dann eine nichttriviale Lösung von (H), wenn λ ein Eigenwert von $\mathbf{A}$ und $\mathbf{c}$ ein zugehöriger Eigenvektor ist.

Für ein Fundamentalsystem von (H) benötigen wir n linear unabhängige Lösungen. Wie diese zu bestimmen sind, hängt von der Gestalt des charakteristischen Polynoms von $\mathbf{A}$ ab.

5.2 $\mathbf{A}$ habe nur einfache Eigenwerte

Besitzt $\mathbf{A}$ ausschließlich einfache Eigenwerte, so müssen diese paarweise verschieden sein. – Wären sie es nicht, d.h. fielen wenigstens zwei Eigenwerte zusammen, dann handelte es sich ja um einen mehrfachen Eigenwert. – Die zugehörigen Eigenvektoren müssen dann Satz 11 zufolge linear unabhängig sein. Wir vermuten, daß dann auch die mittels EULERschem Ansatz (26) erzeugten Funktionen linear unabhängig sind. Dazu beweisen wir den folgenden

Satz 13 $\mathbf{A}$ *habe n paarweise verschiedene Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Sind $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_n$ die zugehörigen Eigenvektoren, dann ist $\{e^{\lambda_1 t}\mathbf{c}_1, e^{\lambda_2 t}\mathbf{c}_2, \ldots, e^{\lambda_n t}\mathbf{c}_n\}$ ein Fundamentalsystem von (H).*

Beweis 13 Daß die $e^{\lambda_i t}\mathbf{c}_i$ Lösungen von (H) sind, wurde bereits im vorigen Abschnitt gezeigt. Es verbleibt also nur noch, ihre lineare Unabhängigkeit zu beweisen. Dazu untersuchen wir ihre WRONSKIdeterminante. Offenbar gilt

$$W[e^{\lambda_1 t}\mathbf{c}_1, e^{\lambda_2 t}\mathbf{c}_2, \ldots, e^{\lambda_n t}\mathbf{c}_n] = e^{\lambda_1 t}e^{\lambda_2 t}\cdots e^{\lambda_n t}\det[\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_n].$$

Gemäß Satz 11 sind die n Eigenvektoren $\mathbf{c}_i$ linear unabhängig, weshalb die aus ihnen gebildete Determinante (rechts) nicht verschwindet. Weil auch die $e^{\lambda_i t}$ nirgends verschwinden, kann die

[11] Leonhard Euler, 1701-1783, schweizer Mathematiker

Wronskideterminante (links) keine Nullstelle besitzen. Gemäß Satz 8 sind die $e^{\lambda_i t}\mathbf{c}_i$ daher linear unabhängig. q.e.d.

Beispiele:

4. Wir suchen die allgemeine Lösung von

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \tag{27}$$

Wegen

$$\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

ist $P(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = (1-\lambda)^2 - 4 = (\lambda+1)(\lambda-3)$; die Matrix $\mathbf{A}$ hat also die beiden einfachen Eigenwerte $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = 3$. Um zu einem zu $\lambda_1 = -1$ gehörigen Eigenvektor $\mathbf{c}_1$ von $\mathbf{A}$ zu gelangen, lösen wir $(\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{E})\mathbf{c}_1 = \mathbf{0}$, also

$$(\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{E})\mathbf{c}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

und erhalten als eine nichttriviale Lösung z.B. $c_{11} = 1$, $c_{21} = -1$, also

$$\mathbf{c}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Analog erhalten wir aus

$$(\mathbf{A} - \lambda_2\mathbf{E})\mathbf{c}_2 = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

einen zu $\lambda_2 = 3$ gehörigen Eigenvektor von $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{c}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die allgemeine Lösung von (27) lautet daher

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = d_1 e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + d_2 e^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{28}$$

5. Wir bestimmen ein Fundamentalsystem von

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -15 & 7 \end{pmatrix}\mathbf{x}. \tag{29}$$

Es ist $P(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 10$ und mithin $\lambda_1 = 1 + 3\mathrm{j}$, $\lambda_2 = 1 - 3\mathrm{j}$. Die Eigenwerte sind einfach. Als nichttriviale Lösungen von $(\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{E})\mathbf{c}_1 = \mathbf{0}$ und $(\mathbf{A} - \lambda_2\mathbf{E})\mathbf{c}_2 = \mathbf{0}$ wählen wir

$$\mathbf{c}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2+\mathrm{j} \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{c}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2-\mathrm{j} \end{pmatrix}.$$

Die Eigenvektoren sind – wie es gemäß Satz 11 sein muß – linear unabhängig. Ein Fundamentalsystem von (29) wäre folglich

$$\left\{ e^{(1+3\mathrm{j})t}\begin{pmatrix} 1 \\ 2+\mathrm{j} \end{pmatrix}, e^{(1-3\mathrm{j})t}\begin{pmatrix} 1 \\ 2-\mathrm{j} \end{pmatrix} \right\}. \tag{30}$$

Wie das Beispiel zeigt, kann ein nach Satz 13 erzeugtes Fundamentalsystem komplex ausfallen, obwohl die dem Problem zugrundeliegende Matrix reell ist, d.h. nur aus reellen Elementen besteht. Komplexe Eigenwerte einer reellen Matrix treten aber stets konjugiert auf, weil die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms einer reellen Matrix selbst reell sind. D.h. ist λ ein komplexer Eigenwert einer reellen Matrix, so ist $\overline{\lambda}$ ebenfalls ein Eigenwert dieser Matrix. Dasselbe gilt für die Eigenvektoren, so daß in einem nach Satz 13 erzeugten Fundamentalsystem konjugiert komplexe Elemente auftauchen. Offenbar kann man anstelle eines konjugiert komplexen Paares auch Real- und Imaginärteil eines der beiden Elemente verwenden:

Satz 14 *Sei* $\mathbf{A}$ *reell und habe n paarweise verschiedene Eigenwerte* λ_i*. Seien* $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ *reell und* $\lambda_{p+1}, \ldots, \lambda_q$ *sowie* $\overline{\lambda}_{p+1}, \ldots, \overline{\lambda}_q$ *komplex.*[12] *Sind* $\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_p$ *die zu* $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ *und* $\mathbf{c}_{p+1}, \ldots, \mathbf{c}_q$ *die zu* $\lambda_{p+1}, \ldots, \lambda_q$ *gehörigen Eigenvektoren, dann ist*

$$\left\{ \mathrm{e}^{\lambda_1 t}\mathbf{c}_1, \ldots, \mathrm{e}^{\lambda_p t}\mathbf{c}_p, \Re[\mathrm{e}^{\lambda_{p+1} t}\mathbf{c}_{p+1}], \Im[\mathrm{e}^{\lambda_{p+1} t}\mathbf{c}_{p+1}], \ldots, \Re[\mathrm{e}^{\lambda_q t}\mathbf{c}_q], \Im[\mathrm{e}^{\lambda_q t}\mathbf{c}_q] \right\}$$

ein reelles Fundamentalsystem von (H).

Beispiel:

6. Wir bestimmen ein reelles Fundamentalsystem von (29). Da keine reellen Eigenwerte existieren, haben wir lediglich Real- und Imaginärteil eines der beiden (konjugiert komplexen) Elemente von (30) zu berechnen. Wegen

$$\mathrm{e}^{(1+3\mathrm{j})t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2+\mathrm{j} \end{pmatrix} = \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} \cos 3t + \mathrm{j}\sin 3t \\ (2\cos 3t - \sin 3t) + \mathrm{j}(\cos 3t + 2\sin 3t) \end{pmatrix}$$

lautet ein reelles Fundamentalsystem von (29)

$$\left\{ \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} \cos 3t \\ 2\cos 3t - \sin 3t \end{pmatrix}, \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} \sin 3t \\ \cos 3t + 2\sin 3t \end{pmatrix} \right\}. \tag{31}$$

5.3 A habe mehrfache Eigenwerte (allgemeiner Fall)

Ist λ ein Eigenwert von $\mathbf{A}$ mit der Vielfachheit $\alpha \geq 1$, so besitzt $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})^\alpha \mathbf{c} = \mathbf{0}$ genau α linear unabhängige Lösungen $\mathbf{c}_i$ (Satz 12). Die Funktionen $\mathrm{e}^{\lambda t}\mathbf{c}_i$ sind dann sicherlich auch linear unabhängig, wie der Beweis von Satz 13 zeigt. Weil die $\mathbf{c}_i$ im allgemeinen aber keine Eigenvektoren von $\mathbf{A}$ zum Eigenwert λ sind, werden die $\mathrm{e}^{\lambda t}\mathbf{c}_i$ auch (H) nicht lösen. Jedoch lassen sich aus den $\mathbf{c}_i$ derartige Lösungen erzeugen:

Satz 15 *Ist* λ *ein Eigenwert von* $\mathbf{A}$ *mit der Vielfachheit* α*, und sind* $\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_\alpha$ *linear unabhängige Lösungen von* $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})^\alpha \mathbf{c} = \mathbf{0}$*, so sind die Funktionen*

$$\mathbf{x}_i(t) = \mathrm{e}^{\lambda t} \left[\mathbf{E} + t(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) + \cdots + t^{\alpha-1} \frac{(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} \right] \mathbf{c}_i \tag{32}$$

mit $i = 1, 2, \ldots, \alpha$ *linear unabhängige Lösungen von (H).*

[12] Es ist $p + 2(q - p) = n$.

Diese α Funktionen lassen sich auch folgendermaßen schreiben:

$$\mathbf{x}_i(t) \quad = \quad \mathrm{e}^{\lambda t}\left[\sum_{l=0}^{\alpha-1} t^l \frac{(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E})^l}{l!}\right]\mathbf{c}_i. \tag{33}$$

Der Beweis dieses Satzes erfolgt im Abschnitt 9.6.

Wendet man Satz 15 nacheinander auf alle Eigenwerte von $\mathbf{A}$ an, so erhält man ein Fundamentalsystem von (H):

Satz 16 $\mathbf{A}$ *habe genau k paarweise verschiedene Eigenwerte* $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ *mit den Vielfachheiten* $\alpha_1, \dots, \alpha_k$, *d.h. es ist* $\alpha_1 + \cdots + \alpha_k = n$. *Zu jedem Eigenwert* λ_j *liefert Satz 15 genau* α_j *linear unabhängige Lösungen von (H). Diese insgesamt n Funktionen* $\mathbf{x}_i$ *bilden ein Fundamentalsystem von (H).*

Ein reelles Fundamentalsystem erhält man bei reeller Matrix wie im vorigen Abschnitt gezeigt.

Beispiel:

7. Man ermittle die allgemeine Lösung von

$$\dot{\mathbf{x}} \quad = \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\mathbf{x}. \tag{34}$$

Es ist

$$P(\lambda) \quad = \quad \det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}) \quad = \quad \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 3 \\ 0 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} \quad = \quad (2-\lambda)^3,$$

d.h. die Matrix besitzt genau einen Eigenwert, nämlich $\lambda = 2$ mit der Vielfachheit $\alpha = 3$. Ferner ist

$$(\mathbf{A}-2\mathbf{E})^3 \quad = \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^3 \quad = \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

d.h. die Matrix $(\mathbf{A}-2\mathbf{E})^3$ hat den Rang 0, weshalb drei linear unabhängige Vektoren $\mathbf{c}_i$ beliebig wählbar sind:

$$\mathbf{c}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{c}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{c}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{E} + t(\mathbf{A}-2\mathbf{E}) + t^2\frac{(\mathbf{A}-2\mathbf{E})^2}{2!} \quad &= \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{t^2}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \quad \begin{pmatrix} 1 & t & 3t - t^2/2 \\ 0 & 1 & -t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Durch Nachmultiplizieren mit den $\mathbf{c}_i$ erhält man

$$\mathbf{x}_1(t) = e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{x}_2(t) = e^{2t}\begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{x}_2(t) = e^{2t}\begin{pmatrix} 3t - t^2/2 \\ -t \\ 1 \end{pmatrix},$$

was gemäß Satz 16 ein Fundamentalsystem von (34) ist. Die allgemeine Lösung von (34) lautet daher:

$$\mathbf{x}(t) = e^{2t}\left[d_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + d_2\begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + d_3\begin{pmatrix} 3t - t^2/2 \\ -t \\ 1 \end{pmatrix}\right]. \tag{35}$$

6 Die inhomogene Gleichung - Variation der Parameter

Die Matrix $\mathbf{A}$ darf nun wieder von t abhängig sein, d.h. wir betrachten

$$\dot{\mathbf{x}}(t) \quad = \quad \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}(t) \tag{I}$$

und

$$\dot{\mathbf{x}}(t) \quad = \quad \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t), \tag{H}$$

und suchen eine partikuläre Lösung von (I). Dazu machen wir den Ansatz

$$\mathbf{x}(t) \quad = \quad c_1(t)\mathbf{x}_1(t) + c_2(t)\mathbf{x}_2(t) + \cdots + c_n(t)\mathbf{x}_n(t), \tag{36}$$

wobei $\{\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t), \ldots, \mathbf{x}_n(t)\}$ ein (bereits bekanntes) Fundamentalsystem von (H) sei, und versuchen die skalaren Funktionen $c_i(t)$ derart zu wählen, daß $\mathbf{x}(t)$ zur Lösung von (I) wird. Wegen $\dot{\mathbf{x}}_i(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}_i(t)$ liefert Einsetzen von (36) in (I)

$$\dot{c}_1(t)\mathbf{x}_1(t) + \dot{c}_2(t)\mathbf{x}_2(t) + \cdots + \dot{c}_n(t)\mathbf{x}_n(t) \quad = \quad \mathbf{b}(t), \tag{37}$$

ein lineares Gleichungssystem für die $\dot{c}_i(t)$, das wegen der linearen Unabhängigkeit der $\mathbf{x}_i(t)$ eine eindeutig bestimmte Lösung besitzt. Integration liefert die gesuchten Funktionen $c_i(t)$ und damit vermöge (36) schließlich eine partikuläre Lösung von (I).

Beispiel:

8. Wir bestimmen eine partikuläre Lösung von

$$\dot{\mathbf{x}} \quad = \quad \begin{pmatrix} -1/(2t) & 1/(2t^2) \\ 1/2 & 1/(2t) \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}. \tag{38}$$

Ein Fundamentalsystem der zugehörigen homogenen Gleichung ist

$$\mathbf{x}_1(t) = \begin{pmatrix} 1/t \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{x}_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix},$$

wie man leicht nachrechnet. – Es läßt sich offenbar nicht wie im Abschnitt 5 angegeben berechnen, weil $\mathbf{A}$ nicht konstant ist. – Der Ansatz $\mathbf{x}(t) = c_1(t)\mathbf{x}_1(t) + c_2(t)\mathbf{x}_2(t)$ führt auf das lineare System

$$\begin{pmatrix} 1/t & 1 \\ -1 & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot{c}_1 \\ \dot{c}_2 \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}.$$

Die Koeffizientendeterminante ist konstant 2; die daher eindeutig bestimmte Lösung ist nach der Cramerschen Regel $\dot{c}_1(t) = 0$, $\dot{c}_2(t) = t$. Für die partikuläre Lösung können die Integrationskonstanten entfallen: $c_1(t) = 0$, $c_2(t) = t^2/2$, weshalb schließlich

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} t^2/2 \\ t^3/2 \end{pmatrix} \tag{39}$$

eine partikuläre Lösung von (38) ist. Ihre allgemeine Lösung lautet folglich

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} t^2/2 \\ t^3/2 \end{pmatrix} + d_1 \begin{pmatrix} 1/t \\ -1 \end{pmatrix} + d_2 \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} \tag{40}$$

mit den frei wählbaren Konstanten d_1 und d_2.

7 Lösung des Anfangswertproblems

Da gemäß Satz 1 jedes Anfangswertproblem eine Lösung besitzt, muß diese in der allgemeinen Lösung enthalten sein. Zur Lösung eines Anfangswertproblems hat man also zunächst die allgemeine Lösung der (inhomogenen) Gleichung zu bestimmen und anschließend die frei wählbaren Konstanten derart anzupassen, daß der Anfangsbedingung genüge getan wird.

Beispiel:

9. Das Anfangswertproblem bestehend aus der Differentialgleichung (38) und der Anfangsbedingung $\mathbf{x}(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, also $t_0 = 1$ und $\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, wird gelöst, indem die Konstanten d_1 und d_2 aus (40) passend gewählt werden:

$$\mathbf{x}(1) = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} + d_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + d_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dies ist ein lineares System für d_1, d_2

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

mit der (natürlich eindeutig bestimmten) Lösung $d_1 = -1/2$ und $d_2 = 0$. Die Lösung des Anfangswertproblems ist also

$$\mathbf{x}(t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} t^2 - 1/t \\ t^3 + 1 \end{pmatrix}. \tag{41}$$

8 Fundamental- und Transitionsmatrix

Durch die Einführung zweier, allein durch $\mathbf{A}(t)$ bestimmter Matrizen, der sogenannten Fundamentalmatrix $\mathbf{X}(t)$ und der Transitionsmatrix $\Phi(t, s)$, lassen sich die Lösungen der homogenen und der inhomogenen Gleichung in eine übersichtlichere Form bringen.

8.1 Die Fundamentalmatrix $\mathbf{X}$

Wir betrachten wieder die homogene Gleichung

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t). \tag{H}$$

Sei $\{\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t), \ldots, \mathbf{x}_n(t)\}$ ein Fundamentalsystem von (H). Dann ist

$$\mathbf{x}_\mathrm{H}(t) = c_1\mathbf{x}_1(t) + c_2\mathbf{x}_2(t) + \cdots + c_n\mathbf{x}_n(t) \tag{42}$$

mit frei wählbaren Konstanten $c_1, \ldots, c_n$ die allgemeine Lösung von (H). Verwendet man die $\mathbf{x}_i(t)$ als Spalten einer Matrix $\mathbf{X}(t)$

$$\mathbf{X}(t) := [\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t), \ldots, \mathbf{x}_n(t)] \tag{43}$$

und die c_i als Zeilen eines Vektors $\mathbf{c}$

$$\mathbf{c} := \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}, \tag{44}$$

dann läßt sich (42) kurz schreiben als

$$\mathbf{x}_\mathrm{H}(t) = \mathbf{X}(t)\mathbf{c}. \tag{45}$$

Bei frei wählbarem konstanten Vektor $\mathbf{c}$ ist dies also die allgemeine Lösung von (H).

Definition 7 *Jede Matrix $\mathbf{X}(t)$, deren Spalten aus n linear unabhängigen Lösungen von (H) besteht, heißt Fundamentalmatrix von (H).*

Satz 17 *Eine $n \times n$-Matrix $\mathbf{X}(t)$ ist Fundamentalmatrix von (H) genau dann, wenn für alle t gilt*

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{X}(t) \tag{46}$$

$$\det[\mathbf{X}(t)] \neq 0. \tag{47}$$

Beweis 17 Sind die Spalten einer $n \times n$-Matrix $\mathbf{X}$ Lösungen von (H), dann genügt $\mathbf{X}$ offenbar der Gleichung (46), denn die i-te Spalte von $\mathbf{X}$ erzeugt die i-te Spalte von $\dot{\mathbf{X}}$. Sind die Spalten obendrein linear unabhängig, dann verschwindet $\det(\mathbf{X})$ als Wronskideterminate der Lösungen $\mathbf{x}_i$ nirgends.

Hat man umgekehrt irgendeine Lösung $\mathbf{X}$ von (46), dann ist jede ihrer Spalten $\mathbf{x}_i$ aus o.g. Grund eine Lösung von (H). (47) sichert die lineare Unabhängigkeit der $\mathbf{x}_i$. q.e.d.

Satz 18 *Sei $\mathbf{X}(t)$ eine Fundamentalmatrix von (H) und $\mathbf{Y}(t)$ eine beliebige $n \times n$-Matrix. Es ist $\mathbf{Y}(t)$ eine Fundamentalmatrix von (H) genau dann, wenn eine reguläre und konstante $n \times n$-Matrix $\mathbf{C}$ existiert, so daß für alle t gilt: $\mathbf{Y}(t) = \mathbf{X}(t)\mathbf{C}$.*

Beweis 18 Sei $\mathbf{Y}(t)$ eine Fundamentalmatrix von (H). Dann sind ihre Spalten $\mathbf{y}_i$ Lösungen von (H) und somit als Linearkombination der Spalten $\mathbf{x}_i$ von $\mathbf{X}$ darstellbar

$$\mathbf{y}_i(t) = \mathbf{x}_1(t)c_{1i} + \mathbf{x}_2(t)c_{2i} + \cdots + \mathbf{x}_n(t)c_{ni} \tag{48}$$

mit $i = 1, 2, \ldots, n$. Diese n Gleichungen lauten in Matrixschreibweise

$$\mathbf{Y}(t) = \mathbf{X}(t)\mathbf{C} \tag{49}$$

mit

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}. \tag{50}$$

Wegen $0 \neq \det(\mathbf{Y}) = \det(\mathbf{XC}) = \det(\mathbf{X})\det(\mathbf{C})$ folgt $\det(\mathbf{C}) \neq 0$, denn $\mathbf{X}$ war als Fundamentalmatrix vorausgesetzt.

Sei umgekehrt $\mathbf{Y} = \mathbf{XC}$ mit $\det(\mathbf{C}) \neq 0$. Dann ist einerseits $\dot{\mathbf{Y}} = \dot{\mathbf{X}}\mathbf{C} = \mathbf{AXC} = \mathbf{AY}$ und andererseits $\det(\mathbf{Y}) = \det(\mathbf{X})\det(\mathbf{C}) \neq 0$, denn es ist $\det(\mathbf{X}) \neq 0$ (Fundamentalmatrix) und $\det(\mathbf{C}) \neq 0$ nach Voraussetzung. q.e.d.

Beispiel:

10. Die Fundamentalmatrix der (38) zugeordneten homogenen Gleichung ist

$$\mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} 1/t & 1 \\ -1 & t \end{pmatrix}, \tag{51}$$

Denn es ist einerseits

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \begin{pmatrix} -1/t^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/(2t) & 1/(2t^2) \\ 1/2 & 1/(2t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/t & 1 \\ -1 & t \end{pmatrix} = \mathbf{A}(t)\mathbf{X}(t) \tag{52}$$

und andererseits $\det(\mathbf{X}) = 2 \neq 0$.

8.2 Lösung des homogenen Anfangswertproblems

Die Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) \tag{53}$$

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \tag{54}$$

mit gegebenen t_0 und $\mathbf{x}_0$ muß sich aus der allgemeinen Lösung

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{X}(t)\mathbf{c} \tag{55}$$

durch passende Wahl der Konstanten $\mathbf{c}$ bestimmen lassen. Mit $t = t_0$ folgt aus (55) und (54)

$$\mathbf{X}(t_0)\mathbf{c} = \mathbf{x}_0,$$

ein lineares System für $\mathbf{c}$, das wegen $\det(\mathbf{X}) \neq 0$ eine eindeutige Lösung besitzt, und zwar

$$\mathbf{c} = \mathbf{X}^{-1}(t_0)\mathbf{x}_0.$$

Einsetzen in (55) liefert die Lösung des Anfangswertproblems (53), (54):

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{X}(t)\mathbf{X}^{-1}(t_0)\mathbf{x}_0. \tag{56}$$

Beispiel:

11. Wir berechnen die Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} -1/(2t) & 1/(2t^2) \\ 1/2 & 1/(2t) \end{pmatrix}\mathbf{x}, \qquad \mathbf{x}(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{57}$$

vgl. Beispiele 8 bis 10. Es ist

$$\mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} 1/t & 1 \\ -1 & t \end{pmatrix}, \mathbf{X}(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{X}^{-1}(1) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{X}^{-1}(1)\mathbf{x}(1) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

weshalb die Lösung von (57) lautet

$$\mathbf{x}(t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 - 1/t \\ 1 + t \end{pmatrix}. \tag{58}$$

8.3 Lösung des inhomogenen Anfangswertproblems

Die Lösung des inhomogenen Anfangswertproblems

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}(t) \tag{59}$$

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \tag{60}$$

läßt sich durch Variation der Parameter berechnen. Unter Verwendung der Fundamentalmatrix machen wir also den Ansatz

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{X}(t)\mathbf{c}(t) \tag{61}$$

und bestimmen den nunmehr von t abhängigen Vektor $\mathbf{c}$ derart, daß $\mathbf{x}$ sowohl der Differentialgleichung genügt als auch die Anfangsbedingung erfüllt. Einsetzen von (61) in (59) liefert wegen $\dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{X}}\mathbf{c} + \mathbf{X}\dot{\mathbf{c}}$ und $\mathbf{A}\mathbf{X} = \dot{\mathbf{X}}$

$$\dot{\mathbf{X}}(t)\mathbf{c}(t) + \mathbf{X}(t)\dot{\mathbf{c}}(t) = \dot{\mathbf{X}}(t)\mathbf{c}(t) + \mathbf{b}(t), \tag{62}$$

und damit als Bedingung für die unbekannte Funktion $\mathbf{c}(t)$

$$\dot{\mathbf{c}}(t) = \mathbf{X}^{-1}(t)\mathbf{b}(t). \tag{63}$$

– Dieser Ausdruck ist wegen $\det(\mathbf{X}) \neq 0$ wohlbestimmt. – Also ist $\mathbf{c}(t)$ bei freier Wahl der Konstanten t_0 und $\mathbf{c}_0$ gemäß

$$\mathbf{c}(t) = \mathbf{c}_0 + \int_{t_0}^{t} \mathbf{X}^{-1}(s)\mathbf{b}(s)\,\mathrm{d}s \tag{64}$$

zu wählen,[13] und für jedes feste Konstantenpaar t_0, $\mathbf{c}_0$ ist dann

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{X}(t)\mathbf{c}_0 + \int_{t_0}^{t} \mathbf{X}(t)\mathbf{X}^{-1}(s)\mathbf{b}(s)\,\mathrm{d}s \tag{65}$$

[13] Offenbar gilt $\mathbf{c}(t_0) = \mathbf{c}_0$.

eine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (59). Offenbar handelt es sich hierbei sogar um die allgemeine Lösung von (59), denn das bestimmte Integral stellt für jede Wahl von t_0 eine partikuläre Lösung von (59) dar ($\mathbf{c}_0 = \mathbf{0}$), und die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung ist bei freier Wahl der Konstanten $\mathbf{c}_0$ durch $\mathbf{X}(t)\mathbf{c}_0$ gegeben, Gleichung (45).

Um auch der Anfangsbedingung (60) genüge zu tun, ist noch $\mathbf{c}_0$ passend zu wählen. Gleichung (65) liefert $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{X}(t_0)\mathbf{c}_0 \overset{!}{=} \mathbf{x}_0$ und mithin $\mathbf{c}_0 = \mathbf{X}^{-1}(t_0)\mathbf{x}_0$. Damit ergibt sich die Lösung des inhomogenen Anfangswertproblems (59), (60) zu

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{X}(t)\mathbf{X}^{-1}(t_0)\mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \mathbf{X}(t)\mathbf{X}^{-1}(s)\mathbf{b}(s)\,\mathrm{d}s. \tag{66}$$

8.4 Die Transitionsmatrix Φ

Die in (66) gleich zweimal auftauchende Matrix $\mathbf{X}(t)\mathbf{X}^{-1}(s)$ besitzt eine besondere Bedeutung. Zunächsteinmal ist sie - im Gegensatz zur Fundamentalmatrix $\mathbf{X}(t)$ - eindeutig bestimmt: Es sei $\mathbf{Y}(t)$ eine weitere Fundamentalmatrix von (H). Dann existiert gemäß Satz 18 eine reguläre konstante Matrix $\mathbf{C}$ mit der Eigenschaft $\mathbf{Y}(t) = \mathbf{X}(t)\mathbf{C}$. Dann gilt $\mathbf{Y}^{-1}(s) = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{X}^{-1}(s)$ und folglich $\mathbf{Y}(t)\mathbf{Y}^{-1}(s) = \mathbf{X}(t)\mathbf{C}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{X}^{-1}(s) = \mathbf{X}(t)\mathbf{X}^{-1}(s)$. Also ist $\mathbf{X}(t)\mathbf{X}^{-1}(s)$ unabhängig von der zugrundegelegten Fundamentalmatrix $\mathbf{X}(t)$, so daß folgende Definition sinnvoll ist:

Definition 8 *Ist $\mathbf{X}(t)$ eine Fundamentalmatrix von (H) bzw. $\mathbf{A}(t)$, so nennt man*

$$\Phi(t,s) := \mathbf{X}(t)\mathbf{X}^{-1}(s) \tag{67}$$

die zu (H) bzw. $\mathbf{A}(t)$ gehörige Transitionsmatrix.

Gemäß Gleichung (56) gilt für jede Lösung $\mathbf{x}(t)$ der homogenen Gleichung (H)

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{X}(t)\mathbf{X}^{-1}(s)\mathbf{x}(s). \tag{68}$$

Der Übergang vom Funktionswert an der Stelle s zum Funktionswert an der Stelle t kann also einfach durch Vormultiplikation des „alten“ Wertes $\mathbf{x}(s)$ mit $\Phi(t,s)$ erfolgen. Deshalb nennt man Φ auch Transitions- oder Übergangsmatrix. Sie besitzt folgende leicht zu verifizierende Eigenschaften:

$$\det[\Phi(t,s)] \neq 0, \tag{69}$$

$$\Phi(t,t) = \mathbf{E}, \tag{70}$$

$$\Phi(t,s)\Phi(s,r) = \Phi(t,r), \tag{71}$$

$$\Phi^{-1}(t,s) = \Phi(s,t) \tag{72}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi(t,s) = \mathbf{A}(t)\Phi(t,s) \tag{73}$$

Bei Verwendung der Transitionsmatrix lautet die Lösung des inhomogenen Anfangswertproblems kurz

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t,t_0)\mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t,s)\mathbf{b}(s)\,\mathrm{d}s. \tag{74}$$

9 Die Matrix $e^{\mathbf{A}t}$

Im folgenden ist **A** wieder eine Konstante.

9.1 Definition

Die skalare Differentialgleichung $\dot{x} = ax$ mit der Konstanten a hat bekanntlich die allgemeine Lösung $x(t) = e^{at}c$, worin c eine frei wählbare Konstante bezeichnet. Wir betrachten die vektorielle Differentialgleichung $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ mit der konstanten Matrix **A** und folgern in Analogie zum skalaren Fall, daß dann $\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{c}$ mit dem frei wählbaren konstanten Vektor **c** die allgemeine Lösung ist. Dazu muß die Matrix $e^{\mathbf{A}t}$ definiert werden.

Definition 9 *Sei* **A** *eine beliebige* $n \times n$*-Matrix. Wir definieren*

$$e^{\mathbf{A}} := \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^i}{i!} = \mathbf{E} + \mathbf{A} + \frac{\mathbf{A}^2}{2} + \frac{\mathbf{A}^3}{6} + \frac{\mathbf{A}^4}{24} + \cdots. \tag{75}$$

Man kann zeigen, daß diese Reihe für jede Matrix **A** konvergiert; die Definition ist daher sinnvoll.

Beispiel:

12. Wir berechnen $e^{\mathbf{A}}$ für

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dann ist

$$\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und

$$\mathbf{A}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -27 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Allgemein gilt daher

$$\mathbf{A}^n = \begin{pmatrix} 1^n & 0 & 0 \\ 0 & (-3)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Für die Partialsummen folgt

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_n &= \mathbf{E} + \frac{\mathbf{A}^1}{1!} + \cdots + \frac{\mathbf{A}^n}{n!} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{1!}\begin{pmatrix} 1^1 & 0 & 0 \\ 0 & (-3)^1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \cdots + \frac{1}{n!}\begin{pmatrix} 1^n & 0 & 0 \\ 0 & (-3)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 + \frac{1^1}{1!} + \cdots + \frac{1^n}{n!} & 0 & 0 \\ 0 & 1 + \frac{(-3)^1}{1!} + \cdots + \frac{(-3)^n}{n!} & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \frac{0^1}{1!} + \cdots + \frac{0^n}{n!} \end{pmatrix}$$

$$\stackrel{(n)}{\rightarrow} \begin{pmatrix} e^1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-3} & 0 \\ 0 & 0 & e^0 \end{pmatrix}.$$

Folglich gilt

$$e^{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} e^1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-3} & 0 \\ 0 & 0 & e^0 \end{pmatrix}.$$

13. Allgemein kann man zeigen: Ist

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

so gilt

$$e^{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}.$$

14. Im Falle $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = \lambda$ hat man $\mathbf{A} = \lambda\mathbf{E}$, und es folgt

$$e^{\lambda\mathbf{E}} = e^{\lambda}\mathbf{E}. \tag{76}$$

Speziell ist $e^{\mathbf{0}} = \mathbf{E}$, wie man auch Definition 9 direkt entnehmen kann.

9.2 Rechenregeln für $e^{\mathbf{A}}$

Sind die Matrizen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ vertauschbar, ist also $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$, so sind auch die Matrizen $e^{\mathbf{A}}$ und $e^{\mathbf{B}}$ vertauschbar, und es gilt

$$e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}} = e^{\mathbf{A}}e^{\mathbf{B}}. \tag{77}$$

Ferner gilt für jede quadratische Matrix $\mathbf{A}$

$$(e^{\mathbf{A}})^{-1} = e^{-\mathbf{A}}. \tag{78}$$

9.3 Rechenregeln für $\mathrm{e}^{\mathbf{A}t}$

Gemäß Definition 9 ist

$$\mathrm{e}^{\mathbf{A}t} \;=\; \mathbf{E} + \mathbf{A}t + \frac{\mathbf{A}^2 t^2}{2!} + \frac{\mathbf{A}^3 t^3}{3!} + \cdots . \tag{79}$$

Da $\mathbf{A}t$ und $\mathbf{A}s$ für jedes Paar t, s vertauschbar sind, ist nach Gleichung (77)

$$\mathrm{e}^{\mathbf{A}(t+s)} \;=\; \mathrm{e}^{\mathbf{A}t}\mathrm{e}^{\mathbf{A}s}. \tag{80}$$

Analog gilt

$$(\mathrm{e}^{\mathbf{A}t})^{-1} \;=\; \mathrm{e}^{-\mathbf{A}t}. \tag{81}$$

Ferner kann man zeigen, daß die Reihe (79) gliedweise differenziert werden darf, d.h. es gilt

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{\mathbf{A}t} &= \mathbf{0} + \mathbf{A} + \frac{2\mathbf{A}^2 t}{2!} + \frac{3\mathbf{A}^3 t^2}{3!} + \cdots \\ &= \mathbf{A}\left(\mathbf{E} + \mathbf{A}t + \frac{\mathbf{A}^2 t^2}{2!} + \cdots\right) \end{aligned}$$

und mithin

$$\left(\mathrm{e}^{\mathbf{A}t}\right)' \;=\; \mathbf{A}\mathrm{e}^{\mathbf{A}t}. \tag{82}$$

9.4 Bedeutung von $\mathrm{e}^{\mathbf{A}t}$

Gleichung (82) besagt, daß $\mathrm{e}^{\mathbf{A}t}$ eine Lösung der Matrixdifferentialgleichung $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X}$ ist. An der Stelle $t = 0$ gilt offenbar $\det[\mathrm{e}^{\mathbf{A}0}] = \det[\mathbf{E}] = 1 \neq 0$, weshalb $\det[\mathrm{e}^{\mathbf{A}t}]$ nirgends verschwindet und daher

$$\mathbf{X}(t) \;=\; \mathrm{e}^{\mathbf{A}t} \tag{83}$$

gemäß Satz 17 eine Fundamentalmatrix von $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ (bzw. $\mathbf{A}$) ist und zwar jene mit der Eigenschaft $\mathbf{X}(0) = \mathbf{E}$. Weiter gilt $\mathbf{X}(t)\mathbf{X}^{-1}(s) = \mathrm{e}^{\mathbf{A}t}\mathrm{e}^{-\mathbf{A}s} = \mathrm{e}^{\mathbf{A}(t-s)}$. Es ist also[14]

$$\Phi(t, s) \;=\; \mathrm{e}^{\mathbf{A}(t-s)} \tag{84}$$

die Transitionsmatrix von $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ (bzw. $\mathbf{A}$).

Damit kann man die Lösung des Anfangswertproblems $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$, $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ in schöner Analogie zum skalaren Fall auch folgendermaßen schreiben:

$$\mathbf{x}(t) \;=\; \mathrm{e}^{\mathbf{A}(t-t_0)}\mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{\mathbf{A}(t-s)}\mathbf{b}(s)\,\mathrm{d}s. \tag{85}$$

[14] Gefahrlaufend, mich zu wiederholen: $\mathbf{A}$ ist eine konstante Matrix. $\mathbf{A}(t-s)$ ist also das $(t-s)$-fache der Matrix $\mathbf{A}$ und nicht ihr Wert an der Stelle $t-s$.

9.5 Praktische Berechnung von $e^{\mathbf{A}t}$

In der Praxis bleibt es leider bei der Schönheit der Analogie, weil sich $e^{\mathbf{A}t}$ mittels der Definition 9 bzw. Gleichung (79) nur höchst beschwerlich berechnen läßt. Stattdessen geht man umgekehrt vor: Man berechne ein Fundamentalsystem $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ von $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ und stelle diese Vektoren zu einer Fundamentalmatrix $\mathbf{X}(t)$ zusammen. Gemäß (67) und (84) ist dann

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{X}(t)\mathbf{X}^{-1}(0). \tag{86}$$

Beispiel:

15. Wir lösen das inhomogene Anfangswertproblem

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^t \cos 2t \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{87}$$

mittels der Formel (85). Um $e^{\mathbf{A}t}$ berechnen zu können, benötigen wir zunächsteinmal ein Fundamentalsystem von $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$. Die charakteristische Gleichung $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = (1-\lambda)[(1-\lambda)^2 + 4] = 0$ liefert die drei einfachen Eigenwerte $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1 - 2\mathrm{j}$, $\lambda_3 = 1 + 2\mathrm{j} = \overline{\lambda_2}$. Zugehörige Eigenvektoren wären z.B.

$$\mathbf{c}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{c}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \mathrm{j} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{c}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\mathrm{j} \end{pmatrix} = \overline{\mathbf{c}_2},$$

weshalb

$$\mathbf{X} = e^t \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & \cos 2t & -\sin 2t \\ 2 & \sin 2t & \cos 2t \end{pmatrix}$$

eine reelle Fundamentalmatrix von $\mathbf{A}$ ist. Probe:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{X}} &= e^t \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & \cos 2t & -\sin 2t \\ 2 & \sin 2t & \cos 2t \end{pmatrix} + e^t \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2\sin 2t & -2\cos 2t \\ 0 & 2\cos 2t & -2\sin 2t \end{pmatrix}, \\ \mathbf{A}\mathbf{X} &= e^t \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & \cos 2t - 2\sin 2t & -\sin 2t - 2\cos 2t \\ 2 & 2\cos 2t + \sin 2t & -2\sin 2t + \cos 2t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$\mathbf{X}(0)$ und $\mathbf{X}^{-1}(0)$ berechnen sich zu

$$\mathbf{X}(0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{X}^{-1}(0) = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 3/2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

und gemäß (86) folgt

$$e^{\mathbf{A}t} = e^t \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\cos 2t + \sin 2t & \cos 2t & -\sin 2t \\ 1 + \frac{3}{2}\sin 2t - \cos 2t & \sin 2t & \cos 2t \end{pmatrix}. \tag{88}$$

Weiter gilt

$$e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) \;=\; e^t\begin{pmatrix} 0 \\ \cos 2t - \sin 2t \\ \sin 2t + \cos 2t \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}
\int_0^t e^{-\mathbf{A}s}\mathbf{b}(s)\,\mathrm{d}s &= \int_0^t \begin{pmatrix} 0 \\ \sin 2s\cos 2s \\ \cos^2 2s \end{pmatrix} \mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 0 \\ -\cos 4s \\ 4s + \sin 4s \end{pmatrix}\Bigg|_0^t \\
&= \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 - \cos 4t \\ 4t + \sin 4t \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e^{\mathbf{A}t}\int_0^t e^{-\mathbf{A}s}\mathbf{b}(s)\,\mathrm{d}s &= \frac{1}{8}e^t\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\cos 2t + \sin 2t & \cos 2t & -\sin 2t \\ 1 + \frac{3}{2}\sin 2t - \cos 2t & \sin 2t & \cos 2t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 - \cos 4t \\ 4t + \sin 4t \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{8}e^t\begin{pmatrix} 0 \\ \cos 2t(2\sin^2 2t) - \sin 2t(4t + 2\sin 2t\cos 2t) \\ \sin 2t(2\sin^2 2t) + \cos 2t(4t + 2\sin 2t\cos 2t) \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{8}e^t\begin{pmatrix} 0 \\ -4t\sin 2t \\ 2\sin 2t + 4t\cos 2t \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

und gemäß (85) folgt schließlich für die Lösung des Anfangswertproblems (87)

$$\mathbf{x}(t) \;=\; e^t\begin{pmatrix} 0 \\ \cos 2t - (1 + \frac{t}{2})\sin 2t \\ (1 + \frac{t}{2})\cos 2t + \frac{5}{4}\sin 2t \end{pmatrix}. \tag{89}$$

Man führe die Probe durch!

9.6 Beweis von Satz 15

Beweis 15 Da $e^{\mathbf{A}t}$ eine Fundamentalmatrix der homogenen Gleichung

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) \tag{H}$$

ist, liefert jede Nachmultiplikation mit einem konstanten Vektor $\mathbf{c}$ eine Lösung $\mathbf{x}(t)$ dieser Gleichung, d.h. die Funktionen $e^{\mathbf{A}t}\mathbf{c}_i$ sind – unabhängig von der Wahl der konstanten Vektoren $\mathbf{c}_i$ – stets Lösungen von (H). Wegen $\det(e^{\mathbf{A}t}) \neq 0$ sind die $e^{\mathbf{A}t}\mathbf{c}_i$ genau dann linear unabhängig, wenn die $\mathbf{c}_i$ linear unabhängig sind.

Wir versuchen nun, $e^{\mathbf{A}t}\mathbf{c}_i$ zu berechnen. Gleichung (79) liefert uns zunächst

$$e^{\mathbf{A}t}\mathbf{c}_i = \left(\mathbf{E} + \mathbf{A}t + \frac{\mathbf{A}^2t^2}{2!} + \frac{\mathbf{A}^3t^3}{3!} + \cdots\right)\mathbf{c}_i.$$

Die Auswertung des Klammerausdrucks ist aber – wie bereits angemerkt – im allgemeinen nicht möglich. Es zeigt sich jedoch, daß die Reihe zu einer (endlichen) Summe wird, wenn man die $\mathbf{c}_i$ geschickt wählt: Es ist $\mathbf{A}t = (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})t + \lambda\mathbf{E}t$, und wegen $\mathbf{AE} = \mathbf{EA}$ sind die Matrizen $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}$ und $\lambda\mathbf{E}t$ für alle λ, t vertauschbar. Gemäß (77) und (76) ist daher

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{A}t}\mathbf{c}_i &= e^{(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E})t}e^{\lambda\mathbf{E}t}\mathbf{c}_i \\ &= e^{\lambda t}e^{(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E})t}\mathbf{c}_i. \end{aligned}$$

Mit der Definition der Matrix $e^{(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E})t}$, Gleichung (75), folgt

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{A}t}\mathbf{c}_i &= e^{\lambda t}\left(\sum_{l=0}^{\infty}\frac{t^l}{l!}(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E})^l\right)\mathbf{c}_i \\ &= e^{\lambda t}\left(\sum_{l=0}^{\alpha-1}\frac{t^l}{l!}(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E})^l\right)\mathbf{c}_i + e^{\lambda t}\sum_{l=\alpha}^{\infty}\left(\frac{t^l}{l!}(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E})^l\mathbf{c}_i\right). \end{aligned} \tag{90}$$

Wählt man die $\mathbf{c}_i$ als Lösungen von

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})^{\alpha}\mathbf{c} = \mathbf{0}, \tag{91}$$

so ist offenbar $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})^l\mathbf{c}_i = \mathbf{0}$ für alle $l \geq \alpha$, und der zweite Summand in (90) verschwindet:

$$e^{\mathbf{A}t}\mathbf{c}_i = e^{\lambda t}\left(\mathbf{E} + (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})t + \cdots + \frac{(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})^{\alpha-1}t^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}\right)\mathbf{c}_i. \tag{92}$$

Ist λ ein α-facher Eigenwert von $\mathbf{A}$, so besitzt (91) gemäß Satz 12 genau α linear unabhängige Lösungen $\mathbf{c}_i$, und (92) erzeugt damit α linear unabhängige Lösungen von (H). q.e.d.

Inhaltsverzeichnis

Literatur

[1] Klaus Morgenthal: Mathematik für Ingenieure - Vorlesungsmitschrift.
Sektion Mathematik der Humboldt-Universität zu Berlin, WS 1989

[2] Gregor Michailowitsch Fichtenholz:
Differential- und Integralrechnung, Band 2. (Hochschulbücher für Mathematik Band 62.)
VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 10. Auflage, Berlin 1990

[3] Wolfgang Ebeling: Lineare Algebra A.
Universität Hannover, Institut für Mathematik, WS 2001/2002
`http://www-ifm.math.uni-hannover.de/~ebeling/LA-A/LAA.pdf`

[4] Wolfgang Ebeling: Lineare Algebra B.
Universität Hannover, Institut für Mathematik, SS 2002
`http://www-ifm.math.uni-hannover.de/~ebeling/LA-B/LAB.pdf`