Partielle Integration und Substitution

Steffen Solyga[*]

8.-15. Mai 2006

Die Bestimmung einer Stammfunktion zu einer gegebenen Funktion ist die Umkehrung der Differentiation. Daher lassen sich sowohl die Produkt- als auch die Kettenregel gewinnbringend verwenden.

1 Partielle Integration

Satz 1 *Seien $u(x)$ und $v(x)$ auf dem Intervall $[a, b]$ stetig differenzierbar.[1] Dann gilt auf $[a, b]$:*

$$\int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x \quad = \quad u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x. \tag{1}$$

In Worten: Man erhält jede Stammfunktion von uv' dadurch, daß man von uv alle Stammfunktionen von $u'v$ abzieht.
Beweis 1 Alle Aussagen beziehen sich auf das Intervall $[a, b]$.

1. Die Funktionen uv' und $u'v$ sind nach Voraussetzung stetig, so daß sie (jeweils) eine Stammfunktion besitzen.[2]

2. Sei f_1 eine Stammfunktion von uv' und f_2 eine Stammfunktion von $u'v$. Dann ist wegen der Linearität des Differenzierens $f_1 + f_2$ eine Stammfunktion von $uv' + u'v$.
   Offenbar ist uv eine weitere Stammfunktion von $uv' + u'v$, denn gemäß der Voraussetzung ist uv differenzierbar, und nach der Produktregel ist $(uv)' = uv' + u'v$.
   Dann können sich $f_1 + f_2$ und uv nur durch eine additive Konstante C unterscheiden, d.h. es gilt $f_1 = uv - f_2 + C$.
   Schreibt man in dieser Gleichung f_1, f_2 als unbestimmte Integrale und bedenkt, daß es sich nun um Mengen von Stammfunktionen handelt, kann die Konstante C entfallen, und man erhält schließlich (1). □

[*]solyga@gmx.de

[1]Definition: Eine Funktion heißt (auf einem Intervall) stetig differenzierbar, wenn sie (auf diesem Intervall) eine stetige Ableitung besitzt.

[2]Daß eine auf dem Intervall I stetige Funktion $f(x)$ eine Stammfunktion besitzt, wurde in der Vorlesung nicht gezeigt. Dies kann man unter Verwendung des bestimmten Integrals z.B. folgendermaßen einsehen: Sei c eine feste Stelle aus I, dann existiert aufgrund der Stetigkeit von f für alle $x \in I$ das bestimmte Integral $F_0(x) := \int_c^x f(\xi)\,\mathrm{d}\xi$. Wie in der Vorlesung gezeigt wurde, ist $F_0(x)$ differenzierbar, und es gilt $F_0'(x) = f(x)$. Also besitzt $f(x)$ auf I eine Stammfunktion, denn $F_0(x)$ ist offenbar eine solche.

Anmerkung: Im Beweis ist bewußt auf die Verwendung des Integralsymbols verzichtet worden, weil dies erfahrungsgemäß einer Verwechslung zwischen bestimmtem und unbestimmtem Integral Vorschub leistet. Die Eigenschaften unbestimmter Integrale ergeben sich allein aus der Differentialrechnung. Oder, noch deutlicher: *Die Eigenschaften unbestimmter Integrale sind gerade die der differenzierbaren Funktionen.* Denn der Ausdruck

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x \tag{2}$$

ist lediglich ein Symbol für die Menge der Stammfunktionen von $f(x)$.

Mittels partieller Integration läßt sich ein gegebenes unbestimmtes Integral zwar nicht unmittelbar berechnen, mit etwas Geschick jedoch derart umformen, daß man rechtsseitig ein Grundintegral erhält. Die folgenden Beispiele mögen das illustrieren:

1. Gesucht seien alle Stammfunktionen von $x\mathrm{e}^x$. Wir setzen $u(x) = x$ und $v'(x) = \mathrm{e}^x$. Dann ist $u'(x) = 1$ und $v(x) = \mathrm{e}^x$. (Die Rechnung bleibt richtig, wenn man $v(x) = \mathrm{e}^x + C$ setzt, aber das ist unnötig.) Es sind u und v auf $\mathbb{R}$ stetig differenzierbar, und es gilt nach Satz 1:

$$\begin{aligned}\int x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x &= x\mathrm{e}^x - \int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x,\\ &= (x-1)\mathrm{e}^x + C.\end{aligned}$$

2. Gesucht seien alle Stammfunktionen von $x^2\mathrm{e}^x$. Wir setzen $u(x) = x^2$ und $v'(x) = \mathrm{e}^x$. Dann ist $u'(x) = 2x$ und $v(x) = \mathrm{e}^x$. Satz 1 und Beispiel 1 liefern

$$\begin{aligned}\int x^2\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x &= x^2\mathrm{e}^x - 2\int x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x,\\ &= x^2\mathrm{e}^x - 2(x-1)\mathrm{e}^x + C,\\ &= (x^2 - 2x - 2)\mathrm{e}^x + C.\end{aligned}$$

(Die Integrationskonstante ist hier eine andere als in Beispiel 1.) – Unter Umständen muß man also mehrfach partiell integrieren. Dabei sollte sich das verbleibende Integral von Schritt zu Schritt vereinfachen. Hätte man beispielsweise gesetzt $u(x) = \mathrm{e}^x$ und $v'(x) = x^2$, so folgte $u'(x) = \mathrm{e}^x$ und $v(x) = x^3/3$, und es träte keine Vereinfachung ein.

3. Gesucht sei eine Stammfunktion von $\cos^2 x$. Wir setzen $u(x) = v'(x) = \cos x$. Dann ist $u'(x) = -\sin x$ und $v(x) = \sin x$, und partielle Integration liefert

$$\int \cos^2 x\,\mathrm{d}x = \sin x\cos x + \int \sin^2 x\,\mathrm{d}x.$$

Die partielle Integration von $\sin^2 x$ führt lediglich zu einer Identiät; stattdessen verwenden wir den Satz des Pythogoras $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ und erhalten

$$\int \cos^2 x\,\mathrm{d}x = \sin x\cos x + \int 1\,\mathrm{d}x - \int \cos^2 x\,\mathrm{d}x.$$

Das erste Integral auf der rechten Seite ist ein Grundintegral. Bringt man das zweite Integral auf die linke Seite, so hat man

$$2\int \cos^2 x\,\mathrm{d}x = \sin x\cos x + x + C_1,$$

und daher

$$\int \cos^2 x \, dx \quad = \quad \frac{x + \sin x \cos x}{2} + C. \tag{3}$$

Also ist $(x + \sin x \cos x)/2$ eine Stammfunktion von $\cos^2 x$.

Anmerkung: Wegen $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ (Additionstheorem) läßt sich (3) auch als

$$\int \cos^2 x \, dx \quad = \quad \frac{2x + \sin 2x}{4} + C$$

schreiben; diese Darstellung findet man in manchen Formelsammlungen [2].

4. Manchmal ist es zweckmäßig, sich das Produkt gewissermaßen künstlich zu erzeugen: Wir suchen eine Stammfunktion von $\ln|x|$ und setzen dazu $u(x) = \ln|x|$ und $v'(x) = 1$. Dann ist $u'(x) = 1/x$ und $v(x) = x$, so daß partielle Integration liefert

$$\int \ln|x| \, dx \quad = \quad x \ln|x| - \int \frac{1}{x} \, x \, dx,$$

also

$$\int \ln|x| \, dx \quad = \quad x(\ln|x| - 1) + C.$$

Folglich ist $x(\ln|x| - 1)$ eine Stammfunktion von $\ln|x|$.

2 Partielle Integration bei bestimmten Integralen

Satz 2 *Seien $u(x)$ und $v(x)$ auf dem Intervall $[a, b]$ stetig differenzierbar. Dann gilt:*

$$\int_a^b u(x)v'(x) \, dx \quad = \quad u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) \, dx. \tag{4}$$

Beweis 2 Nach der Produktregel ist $(uv)' = u'v + uv'$ auf $[a, b]$, folglich uv eine Stammfunktion von $uv' + u'v$, und nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung gilt

$$\int_a^b u(x)v'(x) + u'(x)v(x) \, dx \quad = \quad u(b)v(b) - u(a)v(a). \tag{5}$$

Definiert man zur Abkürzung für eine in a und b definierte Funktion

$$f(x)\Big|_a^b \quad := \quad f(b) - f(a), \tag{6}$$

so hat man mit der Linearität des bestimmten Integrals

$$\int_a^b u(x)v'(x) \, dx + \int_a^b u'(x)v(x) \, dx \quad = \quad u(x)v(x)\Big|_a^b \tag{7}$$

und nach Subtraktion des zweiten Integrals schließlich Gleichung (4). Die Existenz der bestimmten Integrale folgt aus der Stetigkeit der Integranden. □

Beispiel: Gesucht sei folgendes bestimmte Integral:

$$\int_0^{2\pi} \sin x \cos x \, \mathrm{d}x.$$

Wir setzen $u(x) = \sin x$, $v'(x) = \cos x$, $u'(x) = \cos x$, $v(x) = \sin x$ und erhalten nach Satz 2

$$\int_0^{2\pi} \sin x \cos x \, \mathrm{d}x = \sin^2 x \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \sin x \cos x \, \mathrm{d}x. \tag{8}$$

Wegen $\sin 0 = \sin 2\pi = 0$ verschwindet der erste Summand der rechten Seite. Eine Zahl ist aber genau dann gleich ihrem Negativen, wenn sie verschwindet. Also muß das bestimmte Integral verschwinden, d.h. es ist

$$\int_0^{2\pi} \sin x \cos x \, \mathrm{d}x = 0.$$

Natürlich hätte man auch zunächst eine Stammfunktion von $\sin x \cos x$ bestimmen können, um dann den Haupsatz anzuwenden.

3 Substitution in unbestimmten Integralen

Satz 3 *Gegeben seien offene, halboffene oder abgeschlossene Intervalle I und I_1 mit nicht verschwindenden Intervallängen.*

1. *Sei $f(x)$ auf I stetig.*
2. *Sei $x = \phi(t)$ auf I_1 differenzierbar.*[3]
3. *Für jedes $t \in I_1$ sei $\phi(t) \in I$.*

Dann gilt auf I_1:

$$\int f[\phi(t)]\phi'(t)\,\mathrm{d}t \quad = \quad \left[\int f(x)\,\mathrm{d}x\right]_{x=\phi(t)}. \tag{9}$$

In Worten: Besitzt $f(x)$ eine Stammfunktion, so erhält man jede Stammfunktion von $f[\phi(t)]\phi'(t)$ dadurch, daß man in allen Stammfunktionen von $f(x)$ das x durch $\phi(t)$ ersetzt.

Beweis 3 Aufgrund ihrer Stetigkeit, Voraussetzung 1, besitzt $f(x)$ auf I eine Stammfunktion, welche nach Definition auf I differenzierbar ist, siehe Fußnote 2 auf Seite 1.

Sei $F(x)$ auf I eine Stammfunktion von $f(x)$ und mithin $F'(x) = f(x)$. Dann ist wegen Voraussetzung 3 die mittelbare Funktion $\Phi(t) := F[\phi(t)]$ wohldefiniert auf I_1, und wegen Voraussetzung 2 ist sie gemäß der Kettenregel dort auch differenzierbar:

$$\Phi'(t) \quad = \quad F'[\phi(t)]\phi'(t) \quad = \quad f[\phi(t)]\phi'(t).$$

Also ist $\Phi(t) = F[\phi(t)] = F(x)|_{x=\phi(t)}$ auf I_1 eine Stammfunktion von $f[\phi(t)]\phi'(t)$.

Durchläuft C alle reellen Zahlen, so durchläuft $F(x)+C$ alle Stammfunktionen von $f(x)$. Wegen $[F(x) + C]_{x=\phi(t)} = F(x)|_{x=\phi(t)} + C = \Phi(t) + C$ werden folglich auch *alle* Stammfunktionen von $f[\phi(t)]\phi'(t)$ durchlaufen. Schreibt man dies mittels unbestimmter Integrale, erhält man Gleichung (9). □

Mittels Satz 3 lassen sich also Stammfunktionen auffinden, wenn die gegebene Funktion (zufällig) die Form $f[\phi(t)]\phi'(t)$ hat, wie folgende Beispiele zeigen:

1. Gesucht werden alle Stammfunktionen von $\sin^3 t \cos t$. Diese Funktion hat offenbar gerade die für Satz 3 erforderliche Gestalt. Setzt man $f(x) = x^3$ und $\phi(t) = \sin t$, so folgt $f[\phi(t)]\phi'(t) = \sin^3 t \cos t$, und nach Satz 3 gilt:

$$\begin{aligned}\int \sin^3 t \cos t\,\mathrm{d}t \quad &= \quad \int x^3\,\mathrm{d}x\bigg|_{x=\sin t}, \\ &= \quad \frac{x^4}{4}\bigg|_{x=\sin t} + C, \\ &= \quad \frac{\sin^4 t}{4} + C. \end{aligned} \tag{10}$$

[3] ϕ' wird nicht als stetig vorausgesetzt!

2. Es wird eine Stammfunktion von $t \sin t^2$ gesucht. Setzt man $f(x) = \sin x$ und $\phi(t) = t^2$, hat $f[\phi(t)]\phi'(t) = 2t \sin t^2$ bis auf den Koeffizienten bereits die gesuchte Form. Also gilt

$$\begin{aligned}
\int t \sin t^2 \,\mathrm{d}t &= \frac{1}{2} \int 2t \sin t^2 \,\mathrm{d}t, \\
&= \frac{1}{2} \int \sin x \,\mathrm{d}x \Big|_{x=t^2}, \\
&= -\frac{\cos x}{2} \Big|_{x=t^2} + C, \\
&= -\frac{\cos t^2}{2} + C,
\end{aligned}$$

weshalb $-(\cos t^2)/2$ eine Stammfunktion von $t \sin t^2$ darstellt.

3. Sei $u = \phi(x)$ irgendeine differenzierbare Funktion, und $f(u) = u$. Dann ist $f[\phi(x)]\phi'(x) = \phi(x)\phi'(x)$, und nach Satz 3 gilt:

$$\int \phi(x)\phi'(x) \,\mathrm{d}x = \int u \,\mathrm{d}u \Big|_{u=\phi(x)} = \frac{u^2}{2} \Big|_{u=\phi(x)} + C = \frac{\phi^2(x)}{2} + C. \tag{11}$$

Sei weiterhin $u = \phi(x)$ irgendeine differenzierbare Funktion, aber $f(u) = u^k$ mit der reellen Konstanten k. Dann ist $f[\phi(x)]\phi'(x) = \phi^k(x)\phi'(x)$, und es gilt

$$\int \phi^k(x)\phi'(x) \,\mathrm{d}x = \int u^k \,\mathrm{d}u \Big|_{u=\phi(x)} = \frac{u^{k+1}}{k+1} \Big|_{u=\phi(x)} + C = \frac{\phi^{k+1}(x)}{k+1} + C. \tag{12}$$

Für $k = 1$ hat man gerade Gleichung (11), und (12) ist nur für $k \neq -1$ sinnvoll. Für $k = -1$ hat man $f(x) = 1/u$ mit der Stammfunktion $\ln |u|$, weshalb

$$\int \frac{\phi'(x)}{\phi(x)} \,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}u}{u} \Big|_{u=\phi(x)} = \ln |u| \Big|_{u=\phi(x)} + C = \ln |\phi(x)| + C. \tag{13}$$

Zusammenfassend hat man also für beliebige Konstanten k

$$\int \phi^k(x)\phi'(x) \,\mathrm{d}x = C + \begin{cases} \dfrac{\phi^{k+1}(x)}{k+1}, & \text{sofern} \quad k \neq -1 \\ \ln |\phi(x)|, & \text{sofern} \quad k = -1 \end{cases} \tag{14}$$

oder alternativ ($k := -k$) ebenfalls für beliebige k

$$\int \frac{\phi'(x)}{\phi^k(x)} \,\mathrm{d}x = C + \begin{cases} \dfrac{1}{1-k} \dfrac{1}{\phi^{k-1}(x)}, & \text{sofern} \quad k \neq 1 \\ \ln |\phi(x)|, & \text{sofern} \quad k = 1 \end{cases}. \tag{15}$$

4. Als „Zahlenbeispiel“ für die Anwendung von (15) möge $\phi(x) = x^2 + px + q$ mit beliebigen reellen (oder komplexen) Konstanten p und q dienen. Für $k = 1$ folgt aus (15)

$$\int \frac{2x + p}{x^2 + px + q} \,\mathrm{d}x = \ln |x^2 + px + q| + C, \tag{16}$$

und für $k \neq 1$ gilt nach (15)

$$\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^k}\,\mathrm{d}x \quad = \quad \frac{1}{1-k}\,\frac{1}{(x^2+px+q)^{k-1}} + C. \tag{17}$$

Diese Formeln werden bei der Integration gebrochenrationaler Funktionen benötigt.

5. Ein weiteres Beispiel für die Anwendung von (15) erhält man mit $\phi(x) = \sin x$ und $k = 1$. Es ist dann $\phi'(x) = \cos x$ und folglich $\phi'(x)/\phi(x) = \cot x$. Daher gilt:

$$\int \cot x\,\mathrm{d}x \quad = \quad \ln|\sin x| + C. \tag{18}$$

Wie ist $\phi(x)$ zu wählen, um mittels (15) eine Stammfunktion von $\tan x$ zu gewinnen?

6. Als letztes Beispiel wird eine Stammfunktion von $\sin x \cos x$ bestimmt, vgl. Abschnitt 2. Mit $\phi(x) = \sin x$ und $k = 1$ folgt aus Gleichung (14):

$$\int \sin x \cos x\,\mathrm{d}x \quad = \quad \frac{\sin^2 x}{2} + C. \tag{19}$$

Hat eine unbestimmt zu integrierende Funktion nun aber nicht die Form $f[\phi(t)]\phi'(t)$, so läßt sich oftmals der folgende Satz anwenden:

Satz 4 *Gegeben seien offene, halboffene oder abgeschlossene Intervalle I und I_1 mit nicht verschwindenden Intervallängen.*

1. *Sei $f(x)$ auf I stetig.*
2. *Sei $x = \phi(t)$ auf I_1 differenzierbar.*[4]
3. *Für jedes $t \in I_1$ sei $\phi(t) \in I$.*
4. *Sei $\phi'(t) \neq 0$ im Innern von I_1.*[5]

Dann gilt auf I:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x \quad = \quad \left[\int f[\phi(t)]\phi'(t)\,\mathrm{d}t\right]_{t=\phi^{-1}(x)}. \tag{20}$$

In Worten: Man erhält alle Stammfunktionen von $f(x)$ dadurch, daß man eine umkehrbare Funktion $x = \phi(t)$ wählt, alle Stammfunktionen von $f[\phi(t)]\phi'(t)$ bestimmt, und in diesen t durch $\phi^{-1}(x)$ ersetzt. – Hier bezeichnet ϕ^{-1} (im Unterschied zum Beispiel 3 dieses Abschnitts) die Umkehrfunktion zu ϕ und nicht etwa ihr Reziprokes.
Merkregel zu (20): $x = \phi(t)$, $\mathrm{d}x = \phi'(t)\mathrm{d}t$.
Beweis 4 Es ist zu zeigen, daß $f(x)$ auf I und $f[\phi(t)]\phi'(t)$ auf I_1 jeweils eine Stammfunktion besitzen, daß $\phi(t)$ umkehrbar ist und daß zwischen den Stammfunktionen der Zusammenhang (20) besteht.

[4] Auch hier wird ϕ' nicht als stetig vorausgesetzt!
[5] Dies ist die einzige zusätzliche Voraussetzung gegenüber denen von Satz 3.

1. Aufgrund der Voraussetzung 1 besitzt $f(x)$ auf I eine Stammfunktion, siehe Fußnote 2 auf Seite 1.

2. Sei $F(x)$ auf I eine Stammfunktion von $f(x)$. Wegen Voraussetzung 3 ist $F[\phi(t)]$ wohldefiniert auf I_1 und wegen Voraussetzung 2 nach der Kettenregel dort sogar differenzierbar: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F[\phi(t)] = F'[\phi(t)]\phi'(t) = f[\phi(t)]\phi'(t)$. Mithin besitzt $f[\phi(t)]\phi'(t)$ auf I_1 eine Stammfunktion, nämlich z.B. $F[\phi(t)]$.

3. Wegen der Voraussetzungen 2 und 4 muß $\phi(t)$ auf I_1 streng monoton sein, weil $\phi'(x)$ im Innern von I_1 entweder überall positiv oder überall negativ ist. Letzteres folgt aus dem Satz von Darboux.[6] Nach diesem müßte nämlich, wäre $\phi'(x_1) > 0$ und $\phi'(x_2) < 0$ für gewisse innere Punkte x_1, x_2 von I_1, $\phi'(x)$ an einer Stelle $x \in (x_1, x_2)$ verschwinden, was im Widerspruch zur Voraussetzung stünde. Die strenge Monotonie von $\phi(t)$ gereicht aber zu deren Umkehrbarkeit; also existiert $t = \phi^{-1}(x)$ auf I.

4. Neben $F[\phi(t)]$ sei $G(t)$ eine Stammfunktion von $f[\phi(t)]\phi'(t)$. Dann existiert eine Konstante C_1, so daß $G(t) = F[\phi(t)] + C_1$ für alle $t \in I_1$ gilt. Dann gilt für alle $x \in I$ folglich $G[\phi^{-1}(x)] = F\{\phi[\phi^{-1}(x)]\} + C_1 = F(x) + C_1$, d.h. $G[\phi^{-1}(x)]$ ist auf I eine Stammfunktion von $f(x)$.
   Durchläuft C alle reellen Zahlen, so durchläuft $G(t) + C$ *alle* Stammfunktionen von $f[\phi(t)]\phi'(t)$. Dann durchläuft $[G(t) + C]_{t=\phi^{-1}(x)} = G[\phi^{-1}(x)] + C = F(x) + C_1 + C$ aber *alle* Stammfunktionen von $f(x)$. Schreibt man diesen Zusammenhang mittels unbestimmter Integrale, hat man gerade (20). $\square$

Anstelle der Prüfung aller Voraussetzungen des Satzes kann man im konkreten Falle auch (20) mehr oder weniger blind anwenden und im Nachgang per Differentiation prüfen, ob es sich bei der gewonnenen Funktion tatsächlich um eine Stammfunktion der gegebenen Funktion handelt.

Die folgenden Beispiele sollen die Anwendung von Satz 4 demonstrieren:

7. Gesucht wird eine Stammfunktion von $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$. Hierbei ist das Problem die Differenz unter der Wurzel. Um letztere ziehen zu können, ist der Term $1 - x^2$ in ein Quadrat zu verwandeln, was – stets den Satz des Pythagoras im Kopf – mittels der Substitution $x = \phi(t) = \sin t$ auch gelingt: $\sqrt{1 - \sin^2 t} = |\cos t|$. Bevor nun Satz 4 in Anwendung kommt, werden dessen Voraussetzungen auf Erfülltsein geprüft:

   a) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ ist stetig auf $[-1, 1]$.
   b) $\phi(t) = \sin t$ ist differenzierbar auf $[-\pi/2, \pi/2]$.
   c) Für jedes $t \in [-\pi/2, \pi/2]$ ist $\sin t \in [-1, 1]$.
   d) Es ist $\phi'(t) = \cos t > 0$ auf $(-\pi/2, \pi/2)$.

   Also gilt (20) auf $[-1, 1]$. Auf $[-\pi/2, \pi/2]$ ist $f[\phi(t)] = \sqrt{1 - \sin^2 t} = \cos t$. – Achtung: Der Betrag darf nur deshalb entfallen, weil t an das Intervall $[-\pi/2, \pi/2]$ gebunden ist!

[6] Dieser Satz besagt, daß die Ableitung $f'(x)$ einer auf einem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ (im eigentlichen Sinne) differenzierbaren Funktion $f(x)$ im Innern dieses Intervalls jeden zwischen den beiden Randwerten $f'(a) \neq f'(b)$ gelegenen Wert wenigstens einmal annehmen muß. – Er macht also eine ähnliche Aussage wie der Zwischenwertsatz; letzterer setzt aber im Gegensatz zum Darbouxschen Satz die Stetigkeit der betrachteten Funktion voraus.

– Weiter ist $\phi'(t) = \cos t$, $f[\phi(t)]\phi'(t) = \cos^2 t$ und $\phi^{-1}(x) = \arcsin x$. Daher liefert (20) unter Verwendung von (3)

$$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x \;=\; \left[\int \cos^2 t\,\mathrm{d}t\right]_{t=\arcsin x} \;=\; \left[\frac{t+\sin t\cos t}{2}+C\right]_{t=\arcsin x}$$

und wegen $\sin\arcsin x = x$

$$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x \;=\; \frac{\arcsin x + x\cos\arcsin x}{2}+C. \tag{21}$$

Wegen $\cos t = \sqrt{1-\sin^2 t}$ (siehe oben) ist

$$\cos\arcsin x \;=\; \sqrt{1-\sin^2\arcsin x} \;=\; \sqrt{1-x^2}. \tag{22}$$

Folglich gilt auf $[-1,1]$

$$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x \;=\; \frac{1}{2}\left(\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}\right)+C, \tag{23}$$

und $(\arcsin x + x\sqrt{1-x^2})/2$ entpuppt sich als Stammfunktion von $\sqrt{1-x^2}$.

8. Gesucht seien alle Stammfunktionen von $f(x) = (\mathrm{e}^x-1)/(\mathrm{e}^x+1)$. f ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert. Um die Exponentialfunktionen zu eliminieren, bietet sich die Substitution $x = \phi(t) = \ln t$ an; positive t genügen, um mittels ϕ ganz $\mathbb{R}$ zu erzeugen. Wir prüfen, ob die Voraussetzungen von Satz 4 sämtlich erfüllt sind:

   a) e^x ist stetig auf $\mathbb{R}$.

   b) $\ln t$ ist differenzierbar auf $(0,\infty)$.

   c) Für jedes $t \in (0,\infty)$ ist $\ln t \in \mathbb{R}$.

   d) Es ist $(\ln t)' = 1/t > 0$ auf $(0,\infty)$.

   Also gilt auf $\mathbb{R}$ zunächsteinmal:

$$\int \frac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x+1}\,\mathrm{d}x \;=\; \left[\int \frac{t-1}{t+1}\,\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t\right]_{t=\mathrm{e}^x}.$$

   Wird der rechtsseitige Integrand in Partialbrüche zerlegt, so folgt

$$\int \frac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x+1}\,\mathrm{d}x \;=\; \left[\int \frac{2}{t+1}\,\mathrm{d}t - \int\frac{\mathrm{d}t}{t}\right]_{t=\mathrm{e}^x} \;=\; \Big[2\ln|t+1| - \ln|t|\Big]_{t=\mathrm{e}^x}+C,$$

   wegen $t > 0$ können die Beträge entfallen,

$$\int \frac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x+1}\,\mathrm{d}x \;=\; 2\ln(\mathrm{e}^x+1) - x + C. \tag{24}$$

   Die rechte Seite kann man auch als $2\ln\cosh(x/2)+C_1$ schreiben. Warum?

9. Es wird eine Stammfunktion von $f(x) = 1/\sqrt{(1+x^2)^3}$ gesucht. Mit $x = \phi(t) = \tan t$ wird

$$\phi'(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\sin t}{\cos t} = \frac{\cos^2 t + \sin^2 t}{\cos^2 t} = 1 + \tan^2 t = \frac{1}{\cos^2 t}.$$

Die rechte Gleichung zeigt den Sinn der Substitution $x = \tan t$: Der Term $1 + x^2$ läßt sich damit in ein Quadrat umwandeln, so daß die Wurzel gezogen werden kann. f ist definiert auf ganz $\mathbb{R}$ und dort stetig, ϕ ist auf $(-\pi/2, \pi/2)$ (sogar stetig) differenzierbar und bildet seinen Definitionsbereich auf den von f ab, und ihre Ableitung ist als Quadrat überall positiv. Es gilt $t = \phi^{-1}(x) = \arctan x$, und nach Satz 4 ist:

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1+x^2)^3}} &= \left[\int \frac{1}{\sqrt{(1+\tan^2 t)^3}}\frac{\mathrm{d}t}{\cos^2 t}\right]_{t=\arctan x} = \left[\int |\cos t|^3 \frac{\mathrm{d}t}{\cos^2 t}\right]_{t=\arctan x} \\
&= \left[\int |\cos t|\,\mathrm{d}t\right]_{t=\arctan x} = \left[\int \cos t\ \mathrm{d}t\right]_{t=\arctan x} \\
&= \left[\sin t + C\right]_{t=\arctan x} = \left[\frac{\tan t}{\sqrt{1+\tan^2 t}} + C\right]_{t=\arctan x}
\end{aligned}$$

und schließlich

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1+x^2)^3}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C. \tag{25}$$

10. Zur Integration gebrochenrationaler Funktionen benötigt man meist eine Stammfunktion von $f(x) = 1/(x^2 + px + q)$, worin p und q reelle Konstanten sind. Je nach Anzahl reeller Polstellen von f sind folgende drei Fälle abzuhandeln:

a) $p^2 > 4q$: f besitzt zwei reelle Polstellen, und zwar $x_1 = -p/2 - \sqrt{p^2/4 - q}$ und $x_2 = -p/2 + \sqrt{p^2/4 - q}$. Die Partialbruchzerlegung von f liefert

$$\frac{1}{(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{1}{x_1 - x_2}\frac{1}{x - x_1} - \frac{1}{x_1 - x_2}\frac{1}{x - x_2},$$

weshalb – Integrale sind vom Typ ϕ'/ϕ mit $\phi(x) = x - x_i$, Gleichung (13) –

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{1}{x_1 - x_2}\ln\left|\frac{x-x_1}{x-x_2}\right| + C,$$

und mit eingesetzten Polstellen

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2 + px + q)} = \frac{1}{\sqrt{p^2 - 4q}}\ln\left|\frac{2x + p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2x + p + \sqrt{p^2 - 4q}}\right| + C. \tag{26}$$

b) $p^2 = 4q$: f besitzt eine doppelte reelle Polstelle in $x_0 = -p/2$, weshalb $f(x) = 1/(x + p/2)^2$. Das Integral ist vom Typ ϕ'/ϕ^2 mit $\phi = x + p/2$, weshalb gemäß Gleichung (15) mit $k = 2$ gilt:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2 + px + q)} = -\frac{1}{x + p/2} + C. \tag{27}$$

c) $p^2 < 4q$: f besitzt keine reelle, also zwei konjugiert komplexe Polstellen. Mittels quadratischer Ergänzung läßt sich der Nenner in eine Summe aus zwei Quadraten umformen, wobei der zweite Summand eine Konstante ist; mit der *reellen* Konstanten $a = \frac{1}{2}\sqrt{4q - p^2}$ gilt

$$x^2 + px + q \quad = \quad (x + p/2)^2 + a^2,$$

und vermöge der Substitution $x + p/2 = a \tan t$ erhält man ein Quadrat:

$$x^2 + px + q \;=\; \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + a^2 \;=\; a^2 \tan^2 t + a^2 \;=\; a^2(1 + \tan^2 t) \;=\; \frac{a^2}{\cos^2 t}.$$

Setzt man also $x = \phi(t) = -p/2 + a \tan t$, so ist $\phi'(t) = a/\cos^2 t > 0$ auf dem Intervall $I_1 = (-\pi/2, \pi/2)$, es gilt $t = \phi^{-1}(x) = \arctan((x + p/2)/a)$, mithin

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2 + px + q)} \quad = \quad \left[\int \frac{\cos^2 t}{a^2}\, \frac{a}{\cos^2 t}\, \mathrm{d}t\right]_{t=\arctan \frac{x+p/2}{a}} \quad = \quad \left[\frac{t}{a} + C\right]_{t=\arctan \frac{x+p/2}{a}}$$

und folglich

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + px + q} \quad = \quad \frac{2}{\sqrt{4q - p^2}} \arctan \frac{2x + p}{\sqrt{4q - p^2}} + C. \tag{28}$$

Zusammenfassend gilt also:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + px + q} \quad = \quad C + \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{p^2 - 4q}} \ln \left| \dfrac{2x + p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2x + p + \sqrt{p^2 - 4q}} \right| & \text{bei} \quad p^2 > 4q \\ -\dfrac{1}{x + p/2} & \text{bei} \quad p^2 = 4q \\ \dfrac{2}{\sqrt{4q - p^2}} \arctan \dfrac{2x + p}{\sqrt{4q - p^2}} & \text{bei} \quad p^2 < 4q \end{cases} \tag{29}$$

4 Substitution in bestimmten Integralen

Satz 5 *Vorgelegt seien die Funktionen $f(x)$ und $\phi(t)$.*

1. *Sei $f(x)$ auf $[A, B]$ stetig, $A \le a < b \le B$.*
2. *Sei $x = \phi(t)$ auf $[\alpha, \beta]$ differenzierbar.*
3. *Für jedes $t \in [\alpha, \beta]$ sei $\phi(t) \in [A, B]$.*
4. *Sei $\phi(\alpha) = a$ und $\phi(\beta) = b$.*

Dann gilt:

$$\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x \quad = \quad \int_\alpha^\beta f[\phi(t)]\phi'(t)\, \mathrm{d}t. \tag{30}$$

Beweis 5 Wegen Voraussetzung 1 besitzt $f(x)$ auf $[A, B]$ eine Stammfunktion $F(x)$, und es gilt

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \quad = \quad F(b) - F(a). \tag{31}$$

Wegen Voraussetzung 3 ist $\Phi(t) := F[\phi(t)]$ wohldefiniert auf $[\alpha,\beta]$ und wegen Voraussetzung 2 dort sogar differenzierbar. Nach der Kettenregel gilt

$$\Phi'(t) \quad = \quad F'[\phi(t)]\phi'(t) \quad = \quad f[\phi(t)]\phi'(t), \tag{32}$$

d.h. $\Phi(t) = F[\phi(t)]$ ist eine Stammfunktion von $f[\phi(t)]\phi'(t)$. Mithin gilt

$$\int_\alpha^\beta f[\phi(t)]\phi'(t)\,\mathrm{d}t \quad = \quad \Phi(\beta) - \Phi(\alpha) \quad = \quad F[\phi(\beta)] - F[\phi(\alpha)], \tag{33}$$

und mit der Voraussetzung 4 folgt schließlich

$$\int_\alpha^\beta f[\phi(t)]\phi'(t)\,\mathrm{d}t \quad = \quad F(b) - F(a). \tag{34}$$

□

Anmerkungen:

1. Das besondere an Gleichung (30) ist, daß die Umkehrfunktion von ϕ nicht benötigt wird, wie es beim unbestimmten Integral der Fall ist (stattdessen müssen aber die Integrationsgrenzen substituiert werden). Mehr noch: ϕ muß auf dem betrachteten Intervall $[\alpha,\beta]$ nichteinmal umkehrbar sein! Es genügt, *irgendwelche* Werte α und β zu finden, die den Voraussetzungen 3 und 4 genügen, wie das folgende Beispiel zeigt.

2. In Satz 5 kann man überall $A = a$ und $B = b$ setzen, ohne daß er seine Gültigkeit verlöre. In der obigen Gestalt ist er jedoch allgemeiner.

Als Beispiel sei für $r > 0$ (reelle Konstante) das bestimmte Integral

$$\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\,\mathrm{d}x \quad = \quad \frac{\pi r^2}{4} \tag{35}$$

berechnet. $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ ist stetig auf $[0, r]$, d.h. die Voraussetzung 1 ist erfüllt mit $A = a = 0$ und $B = b = r$. Zur Substitution von x bietet sich die auf ganz $\mathbb{R}$ stetig differenzerbare Funktion $x = \phi(t) = r \sin t$ an. Es ist $\mathrm{d}x = r \cos t\,\mathrm{d}t$ und $\phi(0) = 0$ sowie $\phi(\pi/2) = r$, d.h. $\alpha = 0$ und $\beta = \pi/2$ genügen der Voraussetzung 4. Ferner gilt $r \sin t \in [0, r]$, so daß auch der Voraussetzung 3 genüge getan wird. Nach Gleichung (30) gilt also

$$\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\,\mathrm{d}x \quad = \quad \int_0^{\pi/2} \sqrt{r^2 - r^2 \sin^2 t}\; r \cos t\,\mathrm{d}t \tag{36}$$

$$= r^2 \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \sin^2 t}\ \cos t \,\mathrm{d}t \tag{37}$$

$$= r^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 t \,\mathrm{d}t \tag{38}$$

$$= \frac{r^2}{2} \Big[t + \cos t \sin t \Big]_0^{\pi/2} \tag{39}$$

$$= \frac{r^2}{2} \, \frac{\pi}{2}. \tag{40}$$

Alle Voraussetzungen von Satz 5 wären auch für $A = -r$, $B = r$ und z.B. $\alpha = -\pi$, $\beta = 5\pi/2$ erfüllt. Obwohl $x = \phi(t) = r \sin t$ auf $[-\pi, 5\pi/2]$ nicht umkehrbar ist, gilt trotzdem

$$\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{5\pi/2} \sqrt{r^2 - r^2 \sin^2 t}\ r \cos t \,\mathrm{d}t. \tag{41}$$

Nur bereitet die Auswertung des rechtsseitigen Integrals größere Mühe, weil nun das Vorzeichen des Kosinus beachtet werden muß: $\sqrt{1 - \sin^2 t} = |\cos t\,|$.

Literatur

[1] Gregor Michailowitsch Fichtenholz:
Differential- und Integralrechnung, Band 2. (Hochschulbücher für Mathematik Band 62.)
VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 10. Auflage, Berlin 1990
(Verlag Harri Deutsch, ISBN 3-8171-1279-3)

[2] Wilhelm Göhler:
Höhere Mathematik, Formeln und Hinweise.
VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie, 10. Auflage, Leipzig 1989
(Verlag Harri Deutsch, ISBN 3-8171-1754-X)

[3] Hans von Mangoldt, Konrad Knopp:
Einführung in die Höhere Mathematik, Band 3.
S. Hirzel Verlag, 12. Auflage, Leipzig 1963
(15. Auflage, Stuttgart 1990, ISBN 3-7776-0463-1)