Systemgleichungen für Kalman-Filter (ATO)

Steffen Solyga*

21. Juni 2006

1 Kontinuierliches System

1.1 Systemgleichungen

$$\begin{aligned}
\dot{s}(t) &= v(t) && (1)\\
\dot{v}(t) &= a(t) && (2)\\
\dot{a}(t) &= -\frac{1}{T}a(t) + \frac{1}{T}u(t) && (3)\\
y(t) &= s(t) && (4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \dot{s} \\ \dot{v} \\ \dot{a} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1/T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ v \\ a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/T \end{pmatrix} u && (5)\\
y &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ v \\ a \end{pmatrix} && (6)
\end{aligned}$$

kurz

$$\begin{aligned}
\mathbf{x} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u && (7)\\
y &= \mathbf{C}\mathbf{x} && (8)
\end{aligned}$$

mit

$$\mathbf{x} := \begin{pmatrix} s \\ v \\ a \end{pmatrix} \quad \dot{\mathbf{x}} := \begin{pmatrix} \dot{s} \\ \dot{v} \\ \dot{a} \end{pmatrix} \quad \mathbf{A} := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1/T \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/T \end{pmatrix} \quad \mathbf{C} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (9)$$

*solyga@gmx.de

1.2 Fundamental- und Transitionsmatrix

Fundamentalmatrix, Eigenschaft: $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X}$, $\det(\mathbf{X}) \neq 0 \;\forall t$

$$\mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} 1 & t & T^2 \mathrm{e}^{-t/T} \\ 0 & 1 & -T\mathrm{e}^{-t/T} \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{-t/T} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{X}^{-1}(t_0) = \begin{pmatrix} 1 & -t_0 & -T(T+t_0) \\ 0 & 1 & T \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{t_0/T} \end{pmatrix} \tag{10}$$

Transitionsmatrix $\Phi(t, t_0) = \mathbf{X}(t)\mathbf{X}^{-1}(t_0)$, Eigenschaft: $\mathbf{x}(t) = \Phi(t, t_0)\mathbf{x}(t_0)$

$$\Phi(t, t_0) = \begin{pmatrix} 1 & t - t_0 & T^2(\mathrm{e}^{-(t-t_0)/T} - 1) + T(t - t_0) \\ 0 & 1 & T(1 - \mathrm{e}^{-(t-t_0)/T}) \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{-(t-t_0)/T} \end{pmatrix} \tag{11}$$

1.3 Lösung des Anfangswertproblems

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t, t_0)\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi(t, \tau)\mathbf{B}(\tau)u(\tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{12}$$

2 Diskretes System

2.1 Allgemeine Gleichungen

Kontinuierliche Parameter sind ab jetzt überstrichen ($\bar{\mathbf{A}}$ usw.)
$t_0, t_1, \ldots, t_k, t_{k+1}, \ldots$ sind Abtastzeitpunkte.

$$\mathbf{x}(t_{k+1}) = \Phi(t_{k+1}, t_k)\mathbf{x}(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi(t_{k+1}, \tau)\bar{\mathbf{B}}(\tau)u(\tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{13}$$

$$y(t_k) = \mathbf{C}(t_k)\mathbf{x}(t_k) \tag{14}$$

Abkürzungen:

$$\mathbf{x}(k) := \mathbf{x}(t_k) \tag{15}$$

$$u(k) := u(t_k) \tag{16}$$

$$y(k) := y(t_k) \tag{17}$$

$$\mathbf{C}(k) := \mathbf{C}(t_k) \tag{18}$$

$$\Phi(k+1, k) := \Phi(t_{k+1}, t_k) \tag{19}$$

Definitionen:

$$\mathbf{A}(k) := \Phi(k+1, k) \tag{20}$$

$$\mathbf{B}(k) := \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi(t_{k+1}, \tau)\bar{\mathbf{B}}(\tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{21}$$

Annahme: stückweise konstante Stellgröße $u(t)$. (13) und (14) gehen über in

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}(k)u(k) \tag{22}$$

$$y(k) = \mathbf{C}(k)\mathbf{x}(k) \tag{23}$$

2.2 Systemmatrizen

Mit $t_{k+1} = t_k + T_\mathrm{a}$ folgt für das konkrete System

$$\mathbf{A}(k) = \begin{pmatrix} 1 & T_\mathrm{a} & T^2(\mathrm{e}^{-T_\mathrm{a}/T} - 1) + TT_\mathrm{a} \\ 0 & 1 & T(1 - \mathrm{e}^{-T_\mathrm{a}/T}) \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{-T_\mathrm{a}/T} \end{pmatrix} \tag{24}$$

Integrand aus (21)

$$\Phi(t_k + T_\mathrm{a}, \tau)\bar{\mathbf{B}}(\tau) = \begin{pmatrix} T(\mathrm{e}^{-(t_k+T_\mathrm{a}-\tau)/T} - 1) + (t_k + T_\mathrm{a} - \tau) \\ 1 - \mathrm{e}^{-(t_k+T_\mathrm{a}-\tau)/T} \\ \frac{1}{T}\mathrm{e}^{-(t_k+T_\mathrm{a}-\tau)/T} \end{pmatrix} \tag{25}$$

$$\int\limits_{t_k}^{t_k+T_\mathrm{a}} \Phi(t_k + T_\mathrm{a}, \tau)\bar{\mathbf{B}}(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \begin{pmatrix} T^2\mathrm{e}^{-(t_k+T_\mathrm{a}-\tau)/T} - T\tau + (t_k + T_\mathrm{a})\tau - \tau^2/2 \\ \tau - T\mathrm{e}^{-(t_k+T_\mathrm{a}-\tau)/T} \\ \mathrm{e}^{-(t_k+T_\mathrm{a}-\tau)/T} \end{pmatrix}_{t_k}^{t_k+T_\mathrm{a}} \tag{26}$$

folglich

$$\mathbf{B}(k) = \begin{pmatrix} T^2(1 - \mathrm{e}^{-T_\mathrm{a}/T}) - TT_\mathrm{a} + T_\mathrm{a}^2/2 \\ T(\mathrm{e}^{-T_\mathrm{a}/T} - 1) + T_\mathrm{a} \\ 1 - \mathrm{e}^{-T_\mathrm{a}/T} \end{pmatrix} \tag{27}$$

und, vgl. (18),

$$\mathbf{C}(k) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{28}$$

Literatur

[1] Karl Brammer; Gerhard Siffling:
Kalman-Bucy-Filter, Deterministische Beobachtung und stochastische Filterung.
R. Oldenbourg Verlag München/Wien 1975
ISBN 3-486-34661-X