Im allgemeinen

Steffen Solyga*

28. August 2006 - 18. Mai 2010

Darüber, daß mathematische Abhandlungen im allgemeinen nicht besonders unterhaltsam sind, besteht sicherlich kein Zweifel. Wohl aber darüber, ob eine natürliche Zahl im allgemeinen nicht durch 3 teilbar ist [1]. – Dieser Aufsatz wagt und diskutiert eine logisch exakte Definition der Phrase „im allgemeinen“.

1 Motivation

„Bei der durch $ab = a$ definierten Operation handelt es sich im allgemeinen um keine kommutative.“ Diesen Satz schrieb ich vor geraumer Zeit selbst und fragte mich etwas später, was er konkret besagt und ob er überhaupt wahr ist. Was wollte ich mit diesem Satz zum Ausdruck bringen? Daß die Operation für alle mehr als ein Element enthaltenden Träger nicht kommutativ ist; nur (und genau) dann, wenn der Träger genau ein Element enthält, ist sie (trivialerweise) kommutativ. Nun existieren sicherlich unendlich viele Mengen mit genau einem Element; gibt es „mehr“ Mengen, die genau zwei, drei, vier, . . . Elemente enthalten?

2 Recherche

Wenig später stieß ich bei Duschek auf folgenden Satz über natürliche Zahlen a, b [1]: „. . . weil im allgemeinen $a^b \neq b^a$ . . . ist . . . “. Interessanterweise ist er mit folgender Fußnote versehen: „Die Verwendung der Wörter ‚im allgemeinen‘ bedeutet einen sehr starken Appell an das richtige Sprachgefühl, so daß größte Vorsicht am Platz ist. Es ist zum Beispiel richtig, zu sagen, daß die natürlichen Zahlen im allgemeinen größer als 3 sind, weil es nur drei natürliche Zahlen gibt, nämlich 1, 2, und 3, die nicht größer als 3 sind. Aber es wäre völlig falsch, zu sagen, daß die natürlichen Zahlen im allgemeinen nicht durch 3 teilbar sind.“

Worin besteht der Unterschied zwischen diesen beiden Aussagen? Im ersten Fall existieren genau drei, jedenfalls endlich viele Ausnahmen von der in unendlich vielen[1] Fällen zutreffenden Regel „natürliche Zahlen sind größer als 3“. Im zweiten Fall trifft die Regel „natürliche Zahlen

*solyga@gmx.de

[1] Das Wort „unendlich“ bedeutet dasselbe wie „nicht endlich“ im Mengensinne: Ist M eine Menge, so sei eine auf M definierte Aussageform $A(x)$ genau dann für „unendlich viele“ $x \in M$ wahr, wenn die Menge $\{x|x \in M \wedge A(x)\}$ unendlich (nicht endlich, siehe z.B. [3]) ist. Offenbar ist dies nur dann (aber nicht genau dann) der Fall, wenn M selbst unendlich ist.

sind nicht durch 3 teilbar“ in unendlich vielen Fällen zu, aber es existieren auch unendlich viele Ausnahmen. DUSCHEKS Fußnote ließe sich also in folgende Definition verwandeln:

Definition 1 *Sei $A(x)$ eine Aussageform über dem Grundbereich B, einer unendlichen Menge. $A(x)$ ist im allgemeinen für $x \in B$ wahr genau dann, wenn $A(x)$ für fast alle $x \in B$ wahr ist und ein $x \in B$ existiert, für das $A(x)$ falsch ist.*

Dabei sei unter „fast alle“ wie üblich „alle bis auf höchstens endlich viele“ (also möglicherweise kein) verstanden. Nach Definition 1 träfe eine Regel also in unendlich vielen Fällen zu und würde in höchstens endlich vielen Fällen versagen, wenigstens jedoch in einem Fall. Ist es das, was man unter einer „im allgemeinen“ gültigen Regel verstehen will?

Untersuchen wir DUSCHEKS Aussage, für natürliche Zahlen a, b sei im allgemeinen $a^b \neq b^a$ hinsichtlich ihrer Verträglichkeit mit der soeben aufgestellten Definition. Zunächsteinmal ist festzustellen, daß sie in unendlich vielen Fällen wahr ist, z.B. für $a = 1$ und alle $b > 1$. Aber sie ist auch in unendlich vielen Fällen falsch, nämlich für $a = b$ (und alle natürlichen Zahlen b). Im Sinne der Definition 1 ist die Regel $a^b \neq b^a$ daher nicht „im allgemeinen“ wahr.

Ist sie dann etwa (in selbigem Sinne) „im allgemeinen“ falsch, also $a^b = b^a$ „im allgemeinen“ wahr? Anscheinend auch nicht, denn dann dürfte es nur endlich viele Paare a, b mit $a^b \neq b^a$ geben, was offenbar nicht der Fall ist.

Dieser Widerspruch entsteht allerdings nur dann, wenn man die Negation von „im allgemeinen gilt“ mit „im allgemeinen gilt nicht“ gleichsetzt. Dann wäre tatsächlich für gewisse Aussagen $A(x)$ (und unendliche Mengen B) nicht entscheidbar, ob sie „im allgemeinen“ gelten oder nicht, z.B. eben für die Aussage

$$A(x, y) \quad := \quad (x^y \neq y^x) \tag{1}$$

mit $(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Es ist also „nicht im allgemeinen gilt“ wohl zu unterscheiden von „im allgemeinen gilt nicht“, genauso wie „nicht für alle x gilt“ von „für alle x gilt nicht“ zu unterscheiden ist.[2] Insofern sollte es damit keine ernsthaften Probleme geben.

Betrachten wir weitere Beispiele für die Verwendung von „im allgemeinen“ in der Mathematik. PROSKURJAKOW statuiert in [3] für positive reelle Zahlen a, b, daß „im allgemeinen $a^b \neq b^a$ ist“. Diese Aussage deckt sich praktisch mit der DUSCHEKS.

KÄSTNER und GÖTHNER illustrieren in [4] den Unterschied zwischen einer irreflexiblen und einer nicht reflexiblen Relation[3] R (in der Menge aller zu einem gewissen Zeitpunkt lebenden Menschen) wie folgt: „Ebenso ist die Relation ‚ist verliebt in‘ nicht reflexiv, aber auch nicht irreflexiv, denn xRx gilt zwar im allgemeinen nicht, ist aber richtig z.B. für x = Narziß.“ Interpretiert man „xRx gilt im allgemeinen nicht“ als „im allgemeinen ist x nicht verliebt in x“, wäre dies richtig im Sinne der Definition 1, wenn es nur endlich viele sich selbst liebende Menschen gäbe. – Ist die Selbstliebe tatsächlich derart selten? – Aber diese Aussage ist zu nebulös, um hier weiterzuhelfen.

Ein besser geeignetes Beispiel liefern sie weiter hinten in [4]: „Die Nacheinanderausführung von Transformationen in einer Menge M ist im allgemeinen eine nichtkommutative Operation,

[2] Vielmehr ist „nicht für alle x gilt $A(x)$“ äquivalent zu „es existiert ein x, so daß $A(x)$ nicht gilt“, und „es existiert kein x, so daß $A(x)$ gilt“ ist äquivalent zu „für alle x gilt $A(x)$ nicht“.

[3] Zitat aus [4]: „Eine Relation R in M heißt reflexiv genau dann, wenn xRx für alle $x \in M$ gilt. Ist hingegen xRx für kein $x \in M$ erfüllt, heißt R irreflexiv.“ Also ist R in M genau dann nicht reflexiv, wenn ein $x \in M$ existiert, für das xRx nicht gilt.

…“.[4] Ähnlich äußert sich PROSKURJAKOW in [3]: „Für den Fall, daß M mehr als zwei Elemente enthält, ist die Permutationsgruppe von M nicht kommutativ.“ Eine klare Aussage, da sie ohne „im allgemeinen“ auskommt. Ihr Beweis besteht darin, daß für $M = \{1, 2, 3\}$ zwei Permutationen existieren, deren Nacheinanderausführung je nach Reihenfolge zu zwei verschiedenen Permutationen führt. Er schließt daraus: „… der Wert eines Produkts hängt im allgemeinen von der Reihenfolge der Faktoren ab“. Mit anderen (meinen) Worten: „Permutationsgruppen sind im allgemeinen nicht kommutativ.“

Im Sinne der Definition 1 ist diese Aussage anscheinend falsch, denn es gibt unendlich viele Ausnahmen: Jede aus genau einer natürlichen Zahl bestehende Menge führt zu einer Ausnahme, und von diesen Mengen gibt es gewiß nicht nur endlich viele. Allerdings sind die Permutationsgruppe der Menge $\{1\}$ und jene der Menge $\{2\}$ *isomorph*, d.h. im Hinblick auf die betrachteten Beziehungen nicht unterscheidbar, und dies gilt für jedes Mengenpaar $\{i\}, \{j\}$ mit $i, j \in \mathbb{N}$. Auch jedes Paar aus Zweiermengen erzeugt ein Paar isomorpher Permutationsgruppen. Faßt man isomorphe Permutationsgruppen zusammen, erhält man zwar nur endlich viele Klassen, was die obige Aussage wiederum fragwürdig erscheinen läßt, der Übergang auf Transformationsgruppen bringt den Sinn jedoch zurück.

Hilft uns Isomorphie auch bei der Aussage, für natürliche (oder gar reelle) Zahlen a, b sei im allgemeinen $a^b \neq b^a$? Sind 1 und 2 hinsichtlich der betrachteten Beziehungen isomorph? Und wie wäre Definition 1 zu modifizieren, um Isomorphie in M auszuschließen?

3 Fazit

Im konkreten sollte man auf „im allgemeinen“ verzichten.[5]

Literatur

[1] Adalbert Duschek: Vorlesungen über höhere Mathematik, Band 1. Springer-Verlag, 2. Auflage, Wien 1956

[2] I. N. Bronstein, K. A. Semendjajew: Taschenbuch der Mathematik. BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, 22. Auflage, Leipzig 1985

[3] P. S. Alexandroff, A. I. Markuschewitsch, A. J. Chintschin: Enzyklopädie der Elementarmathematik, Band 1 (Arithmetik). Hochschulbücher für Mathematik Band 7. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 2. Auflage, Berlin 1965

[4] Herbert Kästner, Peter Göthner: Algebra – aller Anfang ist leicht. Mathematische Schülerbücherei Nr. 107. BSB B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, 1. Auflage, Leipzig 1983

[4] Als Transformation in M bezeichnet man jede eineindeutige Abbildung der Menge M auf sichselbst. Die Menge G aller Transformationen in M ist eine Gruppe bezüglich der Operation Nacheinanderausführung zweier (ggf. identischer) Transformationen in M, man nennt G die *Transformationsgruppe* der Menge M. Ist M endlich, spricht man auch von der *Permutationsgruppe* von M; jede Transformation ist hier eine Permutation (Umordnung) der Elemente von M. Der obige Satz besagt also, daß die Transformationsgruppe einer Menge M im allgemeinen nicht kommutativ ist.

[5] Zugegebenermaßen sind gewisse Aussagen im allgemeinen besser verständlich. DUSCHEKS „Gefühl“ spielt hier eine nicht zu unterschätzende Rolle.