§ Mittelwert & Varianz gruppierter Meßwerte

Ⓐ n Meßwerte x_i

$$\bar{x} := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \qquad (1) \qquad\qquad s^2 := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 \qquad (2)$$

Verschiebungssatz:

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\bar{x} \sum_{i=1}^{n} x_i + n\bar{x}^2$$

$$= \sum x_i^2 - 2n\bar{x}^2 + n\bar{x}^2$$

$$= \sum x_i^2 - n\bar{x}^2$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 + n\bar{x}^2 = n\left(s^2 + \bar{x}^2\right) \qquad (3)$$

Ⓑ $m+n$ Meßwerte x_i

Index m/n: Bezug ist Gruppe m/n

$$\bar{x}_m = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} x_i \qquad (4m) \qquad\qquad s_m^2 = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} (x_i - \bar{x}_m)^2 \qquad (5m)$$

$$\bar{x}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=m+1}^{m+n} x_i \qquad (4n) \qquad\qquad s_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=m+1}^{m+n} (x_i - \bar{x}_n)^2 \qquad (5n)$$

$$\bar{x} = \frac{1}{m+n} \sum_{i=1}^{m+n} x_i \qquad (6) \qquad\qquad s^2 = \frac{1}{m+n} \sum_{i=1}^{m+n} (x_i - \bar{x})^2 \qquad (7)$$

$$(m+n)\,\bar{x} \overset{(6)}{=} \sum_{i=1}^{m} x_i + \sum_{i=m+1}^{m+n} x_i \overset{(4)}{=} m\bar{x}_m + n\bar{x}_n$$

$$\boxed{(m+n)\,\bar{x} = m\bar{x}_m + n\bar{x}_n} \qquad (8)$$

$$\boxed{\bar{x} = \frac{m}{m+n}\,\bar{x}_m + \frac{n}{m+n}\,\bar{x}_n} \qquad (9)$$

Verschiebungssatz für m, n und m+n Werte

$$\sum_{i=1}^{m} x_i^2 = m\left(s_m^2 + \bar{x}_m^2\right) \qquad (10)$$

$$\sum_{i=m+1}^{m+n} x_i^2 = n\left(s_n^2 + \bar{x}_n^2\right) \qquad (11)$$

$$\sum_{i=1}^{m+n} x_i^2 = (m+n)\left(s^2 + \bar{x}^2\right) \qquad (12)$$

Offenbar ist die linke Seite von (12) die Summe der linken Seiten von (10) und (11). Dann gilt dies auch für die rechten Seiten

$$\boxed{(m+n)\left(s^2 + \bar{x}^2\right) = m\left(s_m^2 + \bar{x}_m^2\right) + n\left(s_n^2 + \bar{x}_n^2\right)} \qquad (13)$$

$$\boxed{s^2 = \frac{m}{m+n}\left(s_m^2 + \bar{x}_m^2\right) + \frac{n}{m+n}\left(s_n^2 + \bar{x}_n^2\right) - \bar{x}^2} \qquad (14)$$

(C) Rekursionsformeln

Offenbar sind in (9) und (14) m, n natürliche Gewichte beim Verrechnen der Gruppen m und n.

Setzen $c_m = \frac{m}{m+n}$, $c_n = \frac{n}{m+n}$

$$\bar{x} = c_m \bar{x}_m + c_n \bar{x}_n \qquad (15)$$

$c_m + c_n = 1$

$$s^2 = c_m\left(s_m^2 + \bar{x}_m^2\right) + c_n\left(s_n^2 + \bar{x}_n^2\right) - \bar{x}^2 \qquad (16)$$