# § Zweiundvierzig

solyga@gmx.de a034

Wieviele Minuten benötigt ein Körper, den man in ein durch den Erdmittelpunkt geradlinig verlaufendes Rohr fallen lässt, um auf der anderen Seite wieder aufzutauchen?

Ⓐ Newtonsches Gravitationsgesetz → Gravitationsfeldstärke in $\vec{r}$ durch Punktmasse M im Ursprung $\vec{0}$

$$\vec{g}(\vec{r}) = -\frac{\gamma M}{r^3}\vec{r} \qquad (1)$$

→ Zentralkraft, $r = |\vec{r}|$, Gravitationskonst. $\gamma$

Annahme: radialsymmetr. Verteilung $\rho(r)$ → Newtonsches Kugelschalentheorem

$$\vec{g}(\vec{r}) = -\frac{\gamma M(r)}{r^3}\vec{r} \qquad (2)$$

(ebenfalls Zentralkraft) mit

$$M(r) = 4\pi\int_0^r \rho(x)\,x^2\,dx \qquad (3)$$

(Masse innerhalb Kugel $r$)

freie Bewegung (Fall) im Feld, $\ddot{\vec{r}} = \vec{g}$

$$\boxed{\ddot{\vec{r}} + \frac{\gamma M(r)}{r^3}\vec{r} = \vec{0}} \qquad (4)$$

(Bewegungsgleichung, lineare hom. Dgl. 2. Ordnung)
Gilt für beliebige radialsymm. Verteilung

## (B) Außenbereich

Sei $\varrho = 0$ für $r > R$, $M_R := M(R)$

Bewegungsgleichung (4) wird für $r > R$

$$\boxed{\ddot{\vec{r}} + \frac{\gamma M_R}{r^3}\vec{r} = \vec{0}}_{\,r>R} \qquad (5)$$

Bewegung um $M_R$; Verteilung radialsymm., sonst beliebig

→ Planetenbewegung, Fluchtgeschwindigkeit

hier nicht interessant

## (C) Innenbereich

Sei $\varrho = \text{const.}$ für $r \leq R$ gemäß (3) ist

$$M(r) = 4\pi\varrho \int_0^r x^2 dx = \frac{4}{3}\pi\varrho r^3$$

$$M(R) = \frac{4\pi}{3}\varrho R^3 =: M_R$$

$$M(r) = \frac{M_R}{R^3} r^3 \qquad (6)$$

$$\boxed{\ddot{\vec{r}} + \frac{\gamma M_R}{R^3}\vec{r} = \vec{0}}_{\,r\leq R} \qquad (7)$$

Bewegung in homog. Verteilung der Masse $M_R$ innerhalb $R$

$$\ddot{\vec{r}} + \omega^2\vec{r} = \vec{0} \qquad (8.1) \qquad\qquad \omega^2 = \gamma M_R/R^3 \qquad (8.2)$$

Lösung des AWP (8.1) mit $\vec{r}(0) = \vec{r}_0$ und $\dot{\vec{r}}(0) = \vec{v}_0$

$$\boxed{\vec{r} = \vec{r}_0 \cos\omega t + \frac{\vec{v}_0}{\omega}\sin\omega t} \qquad (9)$$

$$\dot{\vec{r}} = -\omega\vec{r}_0 \sin\omega t + \vec{v}_0\cos\omega t$$

$$\ddot{\vec{r}} = -\omega^2\vec{r}_0\cos\omega t - \omega\vec{v}_0\sin\omega t = -\omega^2\vec{r}$$

ebene Ellipse, Umlaufzeit $T = 2\pi/\omega$

**Erde** $\gamma = 6{,}6743 \cdot 10^{-11}\ m^3/kg\, s^2$ a034

$R_E = 6371\ km \qquad M_E = 5{,}9722 \cdot 10^{24}\ kg$

$(8.2) \rightarrow \quad \omega_E = 1{,}2415 \cdot 10^{-3}/s$

$T_E = 2\pi/\omega_E = 5060{,}8\ s = 84{,}347\ min$

zum Vergleich: Drehung in 24h $= 17\ T_E$

Fallzeit $T_E/2 = \boxed{42},17$ min

$V_{max} = \omega R = 7909{,}6\ m/s \qquad = \sqrt{\gamma M_R/R}$

$\bar{\rho}_E = \dfrac{M_E}{4/3\,\pi R_E^3} = 5513{,}4\ kg/m^3 \qquad = 5{,}5 * \rho_{Wasser}$

Anmerkung: gerades Rohr → Torus um Erde
mit $V_0 = V_{max}$ (oder Ellipse in Erde $V_0 < V_{max}$)

Umlaufzeit immer 84 Minuten!
Also immer 42 Minuten zur anderen Seite
bei freier Bewegung.

**Mond** $R_M = 1738\ km \qquad = R_E/3{,}7$

$M_M = 7{,}347 \cdot 10^{22}\ kg \qquad = M_E/81$

$\omega_M = 9{,}66 \cdot 10^{-4}/s \qquad = 3/4\ \omega_E$

$\omega_M R_M = 1679\ m/s \qquad = \omega_E R_E/5$

$\bar{\rho}_M = 3341{,}0\ kg/m^3 = 0{,}6 * \bar{\rho}_E$

$T_M/2 = 108{,}4$ min